

kwartalnik nr 2 (7) kwiecień 2004

ISSN 1643-9481

indeks 372366

cena 5 zł (0% VAT)

magazyn

miłośników

matematyki



Matematyka w poezji

Czyż cyfra i miara odejmują co piękności?
Muzyka polega na bardzo ścisłym rachunku,
natura rozwija się według stałych praw,
gwiazdy poruszają się w oznaczonej przestrzeni czasu,
a przecież to nie zmniejsza ich uroku.

Michał Bałucki

Cyrkla, wagi i miary
Do martwych użyj brył;
Mierz siły na zamiary,
Nie zamiar podług sił.
Bo gdzie się serca palą,
Cyrklem uniesień duch,
Dobro powszechnie skalą,
Jedność większa od dwóch.

Adam Mickiewicz

Doskonale mogę sobie wyobrazić antologię
najpiękniejszych fragmentów poezji światowej,
w której znalazłoby się miejsce na twierdzenie Pitagorasa.
Czemuż by nie?
Jest tam olśnienie właściwe wielkiej poezji i forma
świetnie sprowadzona do słów najpotrzebniejszych,
i gracia jakaś, która nie każdemu nawet poecie jest dana.

Wisława Szymborska

Linia jest prosta
od czasu jak poświęcaną kredą
zapisal nam to w kominie
Pitagoras
Przez tysiąc lat
wyciągnięta jak struna
stoi linia na baczność
przed ludzkością
jest już bardzo zmęczona
i o niczym tak nie marzy
jak o zwinieciu się w kłębek

Jerzy Harasymowicz

Wy nie wiecie, co to jest matematyka!
Wy myślicie: liczby, liczby!
Nie! A ona śpiewa, gra jak kryształ.
Cała dusza tonie w dźwięcznym, przejrzystym kryształ.

Stanisław Brzozowski

Niech mnie diabli porwą,
jeżeli w Polsce byłoby możliwym nie tylko wynalezienie,
ale nawet drukowanie tablic logarytmicznych.
Dobry Polak poci się już przy drugiej cyfrze dziesiętnej,
przy piątej dostaje gorączki, a przy siódmej zabija go apopleksja.

Bolesław Prus

W numerze:

Zadania treningowe dla uczestników XVIII Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych i II Mistrzostw Polski w GMiL

Odpowiedzi do zadań ukazały się pod koniec maja na stronie internetowej <http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html> oraz w numerze 3/2004 MMM. Nie należy przysyłać rozwiązań do Komitetu Organizacyjnego Mistrzostw.

Początek kategorii CE

1. Sprawiedliwy podział cukierków. Adaś ma 7 cukierków, Basia ma ich 3, Czesia 2, Darek 8, a Ela 9. Nauczycielka ma w pudełku 21 cukierków, które chce rozdzielić między dzieci w taki sposób, żeby wszystkie miały tyle samo. Ile cukierków otrzyma Czesia?

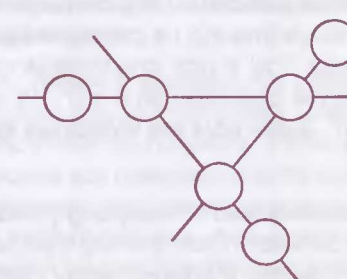
2. Podział nagród. Na nagrody dla trzech finalistów szkolnego konkursu matematycznego przeznaczono 800 zł. Pierwszy otrzymał sumę dwukrotnie większą niż drugi, a drugi trzy razy więcej niż trzeci. Ile otrzymał drugi finalista?

Początek kategorii CM

3. Obserwacja kostki* do gry. Ania i Kasia siedzą naprzeciwko siebie i patrzą na dużą kostkę do gry, która leży na podłodze pomiędzy nimi. Każda z dziewczynek widzi górną ścianę i dwie spośród czterech ścian bocznych, ale każda widzi inne dwie ściany boczne. Ania widzi razem na trzech ścianach 10 oczek, a Kasia 12. Ile jest oczek na ścianie kostki, której nie widzi żadna z dziewczynek?

* W typowej kostce do gry suma oczek na każdej parze przeciwległych ścian jest równa 7.

4. Łamigłówka arytmetyczna. Sześć kółek rozmieszczono na trzech prostych, tak że na każdej z nich znalazły się trzy kółka (patrz rys.).



W kółka te należy wpisać liczby 1, 2, 3, 4, 5 i 6 w taki sposób, aby sumy liczb wpisanych w kółka leżące na tej samej prostej były jednakowe, a suma liczb wpisanych w trzy kółka tworzące trójkąt była podzielna przez 5.

Początek kategorii C1

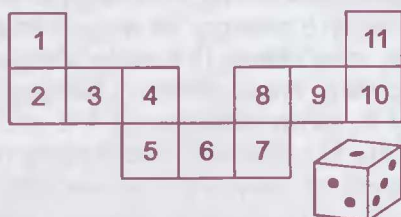
5. Mecz koszykówki. Mecz pomiędzy drużynami A i B zakończył się wygraną drużyny A, która zdobyła 12 punktów więcej niż drużyna B. W koszykówce za każdy celny rzut do kosza otrzymuje się 1, 2 albo 3 punkty. W trakcie tego meczu sędzia odnotował 55 celnych rzutów zawodników obu drużyn i zauważył, że rzutów za 1 punkt było tyle samo, ile rzutów za 3 punkty. W jakim stosunku drużyna A wygrała z drużyną B?

6. Zakup linijki. Ania i Kuba stoją w sklepie i zamierzają kupić linijkę. Każde z nich ma kilka drobnych monet, ale żadne nie może kupić linijki, bo ma za mało pieniędzy. Ani brakuje 75 gr, a Kubie 85 gr. Za posiadane pieniądze nie mogą także kupić linijki do wspólnego użytku, bo brakuje im 20 gr. Ile kosztowała linijka, którą zamierzali kupić?

Początek kategorii
C2, L1, L2, GP i HC

7. Podział kwadratu. Dwie proste prostopadłe dzielą kwadrat na cztery prostokątne części. Trzy z tych prostokątów mają pola równe odpowiednio 6 cm^2 , 10 cm^2 i 18 cm^2 . Jakie pole ma wyjściowy kwadrat?

8. Toczenie kostki*. Kostkę do gry kładziemy na pierwszym polu planszy (rys. poniżej) i przetaczamy ją bez poślizgu z jednego pola na następne, aż kostka znajdzie się na polu 11 (przetaczanie kostki z jednego pola na sąsiednie polega na obrocie dookoła tej krawędzi kostki, która znajduje się na wspólnym boku tych dwóch pól). W każdym z jedenastu stabilnych położeń kostki odczytujemy liczbę oczek na górnej ścianie, a następnie wszystkie odczytane liczby dodajemy.

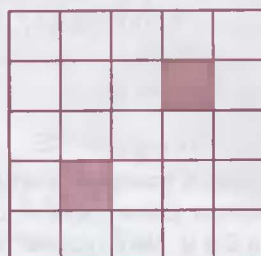


Jak należy położyć kostkę na pierwszym polu, aby otrzymana suma oczek była największa? Podać tę sumę.

9. Układ równań. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych (x, y, z) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y - z = 100 \\ x + y^2 - z = 124. \end{cases}$$

10. Bezpieczny spacer. Na planszy 5×5 podzielonej na 25 jednakowych pól kwadratowych o boku 1 dwa czarne pola są „zaminowane” (patrz rys.).



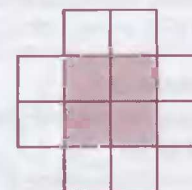
Król szachowy przemieszcza się z jednego pola na drugie zgodnie z regułami gry w szachy. Rozpoczyna spacer z jakiegoś pola niezaminowanego i wraca na to pole, a na każdym innym niezaminowanym polu może być najwyżej raz. Trasa jego spaceru jest nieprzecinającą się łamaną łączącą środki odwiedzanych pól (tzn. łamaną utworzoną z odcinków o długości 1 lub $\sqrt{2}$). Jaką długość ma najdłuższa taka łamana? Podać dokładny wynik i narysować przykład takiej łamanej.

11. Liczba „oszczędna”. Liczbę całkowitą nazywamy oszczędną, gdy jej rozkład na iloczyn liczb pierwszych wymaga użycia mniejszej liczby cyfr niż zapis dziesiętny tej liczby. Np. 625 jest liczbą oszczędną, ponieważ $625 = 5^4$. Ile wynosi różnica między najmniejszą czterocyfrową liczbą oszczędną a największą oszczędną liczbą trzycyfrową?

12. Kąt w trójkącie. W trójkącie ABC poprowadzono środkową BK oraz wysokość CL . Wiadomo, że $BK = CL$ oraz $\angle KBC = \angle LCB$. Obliczyć, w stopniach, miarę kąta A w tym trójkącie.

13. Kolorowy klocek. Mamy 120 sześciennych kostek o krawędzi 1 cm, 80 czerwonych i 40 białych. Z tych kostek sklejamy pełny klocek prostopadłościenny w taki sposób, aby pole czerwonej części jego powierzchni było możliwie najmniejsze. Podać wymiary tego prostopadłościanu oraz pole czerwonej części jego powierzchni.

14. Łamigłówka arytmetyczna. Figura (patrz rys.) składa się z 12 kwadratowych pól.



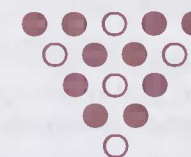
W pola tej figury należy tak wpisać liczby naturalne od 1 do 12, aby sumy liczb wpisanych w każdą czwórkę kwadratów mających wspólny wierzchołek były równe, a ponadto żeby były równe także sumom liczb wpisanych w każde cztery kwadraty leżące w tej samej linii poziomej oraz tej samej linii pionowej. Podać liczby wpisane w 4 kwadraty znajdujące się w środkowej części figury.

15. Gra dwuosobowa. W grze dwuosobowej pozycjami są liczby całkowite nieujemne. Gracz wykonujący ruch z pozycji $n > 0$ rozkłada daną liczbę na sumę dwóch składników nieujemnych $x + y$ spełniających warunek $|x - y| \leq 3$, a następnie skreśla jeden z tych składników. Pozostały składnik jest pozycją, z której, według tej samej reguły, wykonuje ruch drugi gracz.

Z pozycji $n = 0$ nie można już wykonać ruchu i gracz, który taką pozycję pozostawi przeciwnikowi, kończy grę i wygrywa. Czy gracz rozpoczynający grę z pozycji $n = 1367$ ma strategię wygrywającą? Jeśli tak, to jaki powinien wykonać ruch, aby zapewnić sobie wygraną?

15. Najmniejszy trójkąt. W trójkącie ABC środkowe dwóch boków przecinają się pod kątem prostym. Spośród wszystkich trójkątów o tej własności i bokach całkowitoliczbowych wybrać taki, który ma najmniejszy obwód. Podać długości boków tego trójkąta.

17. Trójkąt z żetonów. Na płaszczyźnie rozmieszczamy żetony białe i czarne tworząc trójkąt równoboczny o boku n , w taki sposób aby odległości między sąsiednimi żetonami były równe, a ponadto żeby w każdym trójkącie utworzonym z trzech sąsiadujących żetonów dwa żetony były czarne, a jeden biały (rys. poniżej pokazuje przykład jednego z takich trójkątów dla $n = 5$ ułożonego z 10 czarnych i 5 białych żetonów).



Ile trzeba mieć co najmniej białych żetonów, aby ułożyć taki trójkąt o boku $n = 2005$? Zakładamy, że mamy dostatecznie dużo żetonów czarnych.

18. Suma ułamków. Obliczyć sumę wszystkich ułamków postaci

$$\frac{2004^{2\{2^{-1}\{2^n \pi^{-1}\}\}}}{2^n}$$

przyjmując $n = 1, 2, 3, \dots$ Przez $\{x\}$ oznaczamy część całkowitą liczby x , a $\{x\} = x - [x]$.

Komitet Organizacyjny MP w GMiL

* W typowej kostce do gry suma oczek na każdej parze przeciwległych ścian jest równa 7.

Punkty patronackie prowadzące sprzedaż bieżących i archiwalnych numerów MMM

Kiosk w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego
30-059 **Kraków**, ul. Reymonta 4
tel. (0-12) 632 48 88 w. 5723

Handel Książkami TETJA Józef Siwy
43-170 **Łaziska Górne**, ul. Działkowców 5
tel/fax (0-32) 224 30 99, SMS 0-502 300 382,
e-mail: jsiwy@silesianet.pl

Księgarnia Pedagogiczna Łódzkiego
Stowarzyszenia Pomocy Szkole
90-531 **Łódź**, ul. Wólczańska 202
tel. (0-42) 636 83 26

Sądecki Oddział Polskiego Towarzystwa
Matematycznego
33-300 **Nowy Sącz**, ul. Jagiellońska 61
tel. (0-18) 443 68 99

Biuro Handlowe Wydawnictwa NOWIK
45-056 **Opole**, ul. Katowicka 39, pok. 110
tel. (0-77) 454 36 04

Radomski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli
26-600 **Radom**, ul. Żeromskiego 53
tel. (0-48) 363 06 81, faks (0-48) 360 00 65

UNKA Anna Semeniuk
35-329 **Rzeszów**
al. Powstańców Warszawy 8
budynek L Politechniki Rzeszowskiej

Książki i Pomoce Dydaktyczne
Marek Matejuk
58-309 **Wałbrzych**, ul. Wrocławska 45
tel./faks (0-74) 843 43 09, (0-74) 849 06 90
www.matejuk.pl e-mail: sklep@matejuk.pl

Bieżące numery są również do nabycia w salonach prasowych RUCH S.A. i EMPIK.

Kiosk na Wydziale Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego
02-097 **Warszawa**, ul. Banacha 2
tel. (0-22) 554 41 36

Kiosk w Gmachu Głównym Politechniki
Wrocławskiej
50-370 **Wrocław**
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
tel. (0-71) 320 28 61

Księgarnia DANIEL Grzegorz Drewniak
51-410 **Wrocław**, ul. Brücknera 10
tel. 0-507 049 874, e-mail: info@mat.edu.pl

Księgarnia KWANTUM
50-067 **Wrocław**, ul. Świdnicka 6a
tel. (0-71) 342 04 20
e-mail: kwantum@beta-fk.pl

Księgarnia przy Dolnośląskim Ośrodku
Doskonalenia Nauczycieli
50-527 **Wrocław**, ul. Dawida 1A
tel. (0-71) 336 99 74

Księgarnia Wydawnictw Edukacyjnych
MAT
50-451 **Wrocław**
ul. Komuny Paryskiej 19a, pok. 28
tel. (0-71) 341 88 93 w. 16
witryna internetowa: www.mat.edu.pl

Punkt ksero w Instytucie Matematycznym
Uniwersytetu Wrocławskiego
50-384 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 2/4
tel. (0-71) 375 74 14 (prosić ksero)

Drodzy Czytelnicy!

Witamy Was u progu wiosny kolejnym zeszytem MMM. W ciągłej numeracji nosi on magiczny numer 7, co oznacza, że już wkrótce zamkniemy dwuletni okres działalności. W czasach drapieżnego kapitalizmu jest to z pewnością najtrudniejszy okres dla młodego czasopisma, adresowanego na dodatek do niewielkiego, ściśle wybranego kręgu odbiorców. Dziękujemy wszystkim, którzy okazali nam życzliwość i zainteresowanie, bo to właśnie dzięki nim MMM może się nadal ukazywać.

A czy ta siódemka okaże się dla Czytelników szczęśliwa? Można powiedzieć, że MMM okrzepli i popada w rutynę – w numerze tradycyjnie są informacje o konkursach matematycznych, rozstrzygnięcie konkursów i ogłoszenie nowych (zwróćcie uwagę na ten dotyczący mnemotechnik – choć ogłoszony drobną czcionką, mamy nadzieję, że okaże się niezwykle ciekawy), artykuły przeplatane z zadaniami i łamigłówkami w tradycyjnych działach. Z pozoru nic nowego, ale przy uważnej lekturze na pewno spotka Was wiele niespodzianek.

Wszystkim Czytelnikom składamy życzenia pogodnych Świąt spędzonych w miłej atmosferze i niewyczerpanej dawki wiosennej energii.



Redakcja

W numerze:

Matematyczne zmagania	
Paryż zaprasza mistrzów	2
Wojciech Głodek, Michał Miodek	
Mini-konkurs	4
Etludy geometryczne	
Małgorzata Mikołajczyk	
Geometria nożyczek	6
Małgorzata Mikołajczyk	
Punkt Torricellego	12
Z życia liczb	
Wypijmy za zdrowie π (opr. MM, MŚ)	14
Witold Bednarek	
Podciągnij się z ciągów	18
Samouczek zadanowy	
Mieczysław Trąd	
Nierówność nierówności nierówna	20
W. Górski, P. Kubit, M. Śliwiński	
Matematyczne podróże	23
Era menedżera	
Eugeniusz Sikorski	
Programowanie dynamiczne	24
Zrób sobie brytkę	
Piotr Pawlikowski	
Gwiazdy z gwiazd dwunastu (1)	28
Z notatnika starego belfra	
Antoni Dindorf	
Przepraszam, czy tu biją?	31
Miedzy nami, szperaczami	
Forum Czytelników	32
Łamanie głowy, czyli burza w mózgu	
Zadania konkursowe	33
Wyniki i odpowiedzi	36
Ponadto nasze stałe rubryki:	
Sztafeta pokoleń, czyli 5-10-15-20 (s. 25)	
Wylowione z sieci (s. 4, 14, 20, 23, 31 i 34)	

mmm Magazyn Miłośników Matematyki 2/2004

<http://www.mmm.ig.pl>

ISSN 1643-9481, NAKŁAD 5000 egz.

WYDAWCA: Oficyna Wydawnicza ATUT – Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe

RADA REDAKCYJNA

Rościsław Rabczuk, Zbigniew Romanowicz, Zbigniew Skoczylas

REDAKCJA

Małgorzata Mikołajczyk (redaktor naczelny), Michał Śliwiński, Wojciech Głodek (strona WWW), Krzysztof Skwark (menedżer tytułu)

PROJEKT OKŁADKI

Adam Łowczycki, Ewa Karolczak

SKŁAD I ŁAMANIE

Sigma – Ewa Karolczak
53-149 Wrocław, ul. Racławicka 11/6

ADRES REDAKCJI

Magazyn Miłośników Matematyki
50-010 Wrocław, Podwale 62
tel. (0-71) 342 20 56
e-mail: mmm@atut.ig.pl

WARUNKI PRENUMERATY

Koszt prenumeraty równa się liczbie zamawianych numerów pisma pomnożonej przez cenę pojedynczego numeru (5 zł). Każda wpłata powinna mieć adnotację, których numerów dotyczy, oraz zawierać adres zamawiającego. Można zamawiać również numery archiwalne.

Należność prosimy wpłacać na konto:

Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe
50-010 Wrocław, Podwale 62
BZ WBK I O/Wrocław
24 1090 2398 0000 0006 0802 5123

MMM dostępny jest w sprzedaży na terenie całego kraju w salonach prasowych RUCH, EMPIK oraz w punktach patronackich.

CENNIK REKLAM

- Okładka (pełny kolor):
II strona – 3000 zł, III strona – 2000 zł;
- wewnątrz (2 kolory): 1 strona – 1000 zł, 1/2 strony – 600 zł, 1/3 strony – 400 zł.

Podane kwoty są cenami netto, należy doliczyć 22% VAT.

Redakcja nie odpowiada za treść reklam i ogłoszeń.

Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadsyłanych tekstów. Tytuły pochodzą od redakcji. Niezamówionych materiałów nie zwracamy.

Zapraszamy do współpracy! Redakcja

Paryż zaprasza mistrzów



W grudniu 2003 zakończył się I etap eliminacji do II Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych, które stanowią krajowe eliminacje do XVIII Mistrzostw Międzynarodowych. Poniżej podajemy wyniki tego etapu oraz wybór zadań kolejnej serii eliminacyjnej. Wyłoni ona uczestników finałów krajowych, które odbędą się 15 i 16 maja we Wrocławiu. Zwycięzców przedstawimy w następnym numerze.

Więcej informacji: <http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html>

I etap GMiL 2003/2004

kategoria	liczba uczestników	zakwalifikowano do II etapu
CE (kl. III SP)	37	37
CM (kl. IV SP)	75	64
C1 (kl. V i VI SP)	262	226
C2 (gimnazja)	474	419
L1 (szkoły ponadgimnazjalne)	460	311
L2 (studenci i szkoły pomaturalne)	63	57
GP (dorośli amatorzy)	55	50
HC (zawodowi matematycy i informatycy)	45	42
Razem	1471	1206

Wkładka do bieżącego numeru zawiera zadania treningowe dla uczestników finałów krajowych opracowane przez Przewodniczącego Jury Mistrzostw Polski doc. dr Zbigniewa Romanowicza.

Wybrane zadania II etapu eliminacji II Mistrzostw Polski w GMiL prezentujemy na sąsiedniej stronie.

Pożyczka

Marek: Pożycz mi 96 groszy.

Jarek: Nie mam tyle.

M: A ile masz?

J: Gdybym miał dwa razy tyle, ile mam teraz, to po wręczeniu Ci kwoty, o którą prosisz, pozostałoby mi tyle, ile teraz brakuje mi, żeby spełnić Twoją prośbę. Ile pieniędzy ma Jarek?

Prima aprills, prima aprills,
1 zł = 100 gr = 10 gr · 10 gr = 0,1 zł · 0,1 zł = 0,01 zł = 1 gr
czytaj powoli, bo się pomylisz

Konkursowe zadanie

W finale konkursu matematycznego zawodnicy mieli podać w porządku rosnącym 13 liczb naturalnych, których suma wynosi 94. Zadanie okazało się łatwe, wszyscy wykonali je poprawnie, ale każdy podał inną odpowiedź.

Ilu co najwyżej uczniów brało udział w tym konkursie?

Odważniki

W zestawie 7 odważników, których wagi wyrażają się całkowitymi liczbami gramów, jest co najmniej jeden o wadze 1 g i co najmniej jeden o wadze 13 g. Jeśli z zestawu usuniemy dowolny odważnik, to pozostałe można będzie zrównoważyć na wadze szalkowej.

Jaka jest minimalna waga takiego zestawu?

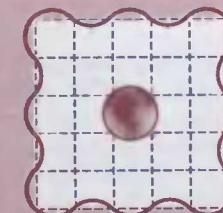
Tajemnicza liczba

Pewna liczba naturalna powiększona o iloczyn swoich cyfr daje swój anagram.

Jaka jest najmniejsza liczba o tej własności?

Podział trawnika

Na rysunku przedstawiono plan trawnika ze stawem pośrodku. Trawnik należy podzielić na 6 przystających części, które dadzą się nałożyć jedna na drugą bez odwracania „na lewą stronę”.



Trójkąt i koła

Promień koła wpisanego w trójkąt prostokątny wynosi 5 cm, a odległość między środkami koła wpisanego i opisanego 12 cm.

Jaki jest obwód, a jakie pole trójkąta?

Suma ułamków

Niech $d(n)$ oznacza zaokrąglenie liczby $\sqrt{n}$ do najbliższej liczby całkowitej.

Ile wynosi suma $\frac{1}{d(1)} + \frac{2}{d(2)} + \frac{3}{d(3)} + \dots + \frac{2004}{d(2004)}$?

Kryptarytm poligloty

W kryptarytmie NINE $\times$ THREE = NEUF $\times$ TROIS różne litery zastępują różne cyfry i na odwrót. Słowa zewnętrzne są podzielne przez 3, a wewnętrzne przez 9.

Co to za działanie?

MiNI-konkurs



WYDZIAŁ
MATEMATYKI I NAUK
INFORMATYCZNYCH

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych (MiNI) Politechniki Warszawskiej od czterech lat organizuje konkurs dla nastoletnich miłośników matematyki. Udział może wziąć każdy, kto posiada dostęp do Internetu. Jedną z nagród jest wolny wstęp na studia matematyczne lub informatyczne. Kolejna edycja rozpoczęła się na początku lutego 2004 roku.

Aby przystąpić do Powszechnego Internetowego Konkursu dla Uczniów Szkół Średnich z Matematyki, wystarczy zarejestrować się na stronie <http://www.konkurs.mini.pw.edu.pl>. Trzyetapowe eliminacje są rozgrywane korespondencyjnie. Uczestnicy otrzymują serie zadań wylosowanych przez system komputerowy. Zadania można rozwiązać w dowolnym czasie, korzystając z dowolnych pomocy. Jedyńm ograniczeniem czasowym jest to, żeby zadania z III etapu były wysłane do końca maja.

W etapach I i II zadania mają formę testu wielokrotnego wyboru (każda z 4 odpowiedzi może być prawdziwa lub nie). Odpowiedzi podaje się w trybie on-line, system komputerowy sprawdza, czy nie ma błędów, a po zdobyciu określonej liczby punktów zawodnicy przechodzą do następnego etapu. Jeśli ktoś nie zdobędzie wymaganego limitu punktów, musi zakończyć grę, ale nie ma się czym przejmować. Do konkursu można przystąpić dowolną liczbę razy (wybierając nowy identyfikator). Niestety za każdym razem trzeba startować od początku.

Wyłowione z sieci (1)

Encyklopedia wielościanów

<http://www.georgehart.com>

George Hart jest wszechstronnie uzdolnionym rzeźbiarzem, matematykiem, inżynierem, nauczycielem i autorem książek. Jego geometryczne rzeźby w formie wielościanów nagradzane były na wielu międzynarodowych wystawach. Na stronie można znaleźć m.in. Wirtualną Encyklopedię Wielościanów (informacje o ponad 300 wielościanach i ich kompozycjach) zdjęcia prac oraz artykuły autora (między innymi o algorytmach tworzenia komputerowych obrazów wielościanów).

cd. s. [100(π - [π])]

Etap pierwszy składa się z dwóch serii po 10 zadań (w pierwszej serii zadania są za 1 pkt, w drugiej – za 2 pkt.). Niezależnie od wyniku pierwszej serii przechodzi się do serii drugiej. W obu seriach można zdobyć łącznie 30 pkt., a żeby przejść do drugiego etapu, należy mieć co najmniej 22 pkt. Etap drugi to 3 serie po 10 zadań (odpowiednio za 3, 4 i 5 pkt.). Punkty dodaje się do rezultatu z pierwszego etapu. Do kolejnej serii przechodzi się niezależnie od wyniku, ale aby awansować do trzeciego etapu, należy zdobyć łącznie co najmniej 113 punktów. Dopiero ten etap jest prawdziwym wyzwaniem. Tutaj do rozwiązania jest 10 zadań otwartych za 10 pkt. każde. Tym razem pełne rozwiązania trzeba przesłać na papierze. Do tej pory wystarczyło jedynie znaleźć prawidłowy wynik, teraz trzeba przedstawić jego kompletne uzasadnienie. Luki w rozumowaniu lub nieuzasadnienie przyjętych założeń oznaczają stratę cennych punktów, a te mają znaczenie przy kwalifikowaniu do finału. Prac oczywiście nie sprawdza już maszyna, ale pracownicy WMiNI.

Wyniki można na bieżąco śledzić w Internecie, gdyż w trakcie trwania konkursu tworzony jest ranking osób, które przesyłały do

organizatorów rozwiązania zadań III etapu. O awansie do finału decyduje pozycja uczestnika w ostatecznym rankingu.

Wszystkie konkursowe zadania są z zakresu szkoły średniej i nie wymagają więcej wiedzy, niż zdobyta na lekcjach, natomiast nie są to typowe zadania szkolne. Często ich rozwiązania wymagają subtelności, wieloetapowego rozumowania. Oczywiście poziom trudności zadań rośnie z kolejnymi etapami. Te trudniejsze wymagają umiejętności twórczego myślenia, standardowe sposoby rozwiązywania często mogą okazać się niewystarczające.

Finał konkursu odbywa się w połowie czerwca w Warszawie. Jest w nim miejsce tylko dla 150 najlepszych (zazwyczaj wystarcza do tego ok. 90 (na 100) punktów zdobytych w III etapie). Na finalistów czeka 5 zadań, z którymi muszą uporać się w 3 godziny. Zadania finałowe wymagają otwartego sposobu myślenia i co najmniej jedno z nich nastawione jest na wyłowienie ludzi naprawdę obdarzonych talentem. Jednak aby osiągnąć wynik w granicach 80 pkt. i zostać wyróżnionym, wystarczy być solidnie przygotowanym w zakresie programu szkoły średniej. Na najlepszych czekają cenne nagrody. Około 20 osób otrzymuje indeks na studia na Politechnice Warszawskiej (5 na informatyce, 15 na matematyce). Przyjemnie jest mieć świadomość, że studia ma się już „w kieszeni”. Dlatego zachęcamy wszystkich do wystartowania w konkursie.

Dla przykładu w ubiegłym roku pierwsze dwa etapy pokonało około 750 osób tzn. tyle pobrało zadania III etapu. Do organizatorów dotarło natomiast nieco ponad 300 prac z ich rozwiązaniami. Do finału awansowało 159 osób, 10 osób zostało laureatami (dostały indeksy), a kolejnych 18 otrzymało wyróżnienia. Nagrodą za I miejsce był komputer, za dwa kolejne – kursy komputerowe.

Zadania finałowe znajdują się na stronie: <http://www.konkurs.mini.pw.edu.pl/konkurs/historia.cgi>

Wojciech Głodek, Michał Miodek

Redakcja dziękuje za pomoc panu Marianowi Majchrowskiemu, pełnomocnikowi Dziekana Wydziału MiNI PW ds. konkursu.

* M. Miodek jest obecnie w klasie maturalnej. Zdobył już taki indeks i najprawdopodobniej go wykorzysta. W konkursie startował trzy razy, zawsze dochodząc do finału.

Przykładowy zestaw zadań I serii eliminacyjnej

1. Zbiorem wartości funkcji $y = -1 + 3\sin^2 x + 5\cos^2 x$ jest:
a) $\langle 1, 8 \rangle$; b) $\langle 4, 9 \rangle$; c) $\langle 2, 4 \rangle$; d) $\langle 4, 8 \rangle$.

2. Istnieje taki trójkąt, że:

- a) dwie jego wysokości są prostopadłe; b) dwusieczne dwóch jego kątów wewnętrznych są prostopadłe; c) symetralne dwóch jego boków są prostopadłe; d) dwie jego środkowe są prostopadłe.

3. Na egzamin wstępny przybyło 100 kandydatów, z których 85 znało język angielski, 80 francuski, 70 niemiecki i 66 rosyjski. Ilu kandydatów znało wszystkie cztery języki?

- a) co najmniej jeden; b) co najwyżej 66; c) 81; d) 71.

4. Zbiór rozwiązań nierówności $4\sin x \cos x > 0$ jest równy zbiorowi rozwiązań nierówności

- a) $\sin 2x > 0$; b) $\cos x > 0$; c) $\tan x > 0$; d) $\cot x > 0$.

5. W jakim wielokącie liczba przekątnych jest 3 razy większa od liczby boków?

- a) w ośmiokącie; b) w dziewięciokącie; c) w sześciokącie; d) nie ma takiego wielokąta.

6. Dla jakich wartości współczynników a i b wielomian: $P(x) = x^6 + ax + b$ jest podzielny przez $x^2 - 4$?

- a) $a = 0, b = -64$; b) $a = 32, b = 0$; c) $a = 16, b = 16$; d) nie istnieją takie parametry a, b , by $P(x)$ dzielił się przez $x^2 - 4$.

7. Rzucamy raz dwiema kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek na obu kostkach będzie podzielna przez 3 lub 4?

- a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{19}{36}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{21}{36}$.

8. Na 10 strzałów pierwszy strzelec trafia do celu 9 razy, drugi 8 razy, a trzeci 7 razy. Każdy ze strzelców oddał 1 strzał. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cel został trafiony przez pierwszego lub trzeciego strzelca?

- a) 0,97; b) 0,95; c) mniej niż 0,5; d) więcej niż 0,5.

9. Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu na płaszczyźnie jest półkołem. Wynika stąd, że przekrojem osiowym stożka jest trójkąt

- a) prostokątny; b) równoboczny; c) rozwartokątny; d) ostrokątny.

10. Obliczyć $(\cotg 255^\circ - \cotg 555^\circ) \cdot (\cotg 795^\circ + \cotg 195^\circ)$.

- a) $-6\sqrt{3}$; b) $-7\sqrt{3}$; c) $-8\sqrt{3}$; d) $-8\sqrt{2}$.

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Geometria nożyczek



Każdy z pewnością bawił się kiedyś starochińskim tangramem. Zadania tangramowe, polegające na rozcinaniu danej figury i układaniu z otrzymanych części innej figury, do dziś są bardzo popularne. Okazuje się, że technika tangramów może być stosowana również w matematyce.

Tangramy

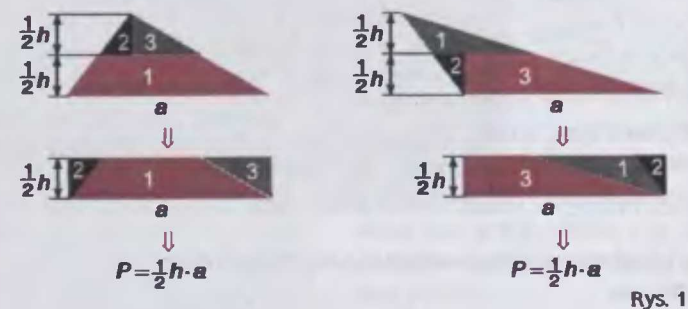
Chiński tangram (nazwę tę wprowadził amerykański miłośnik i twórca łamigłówek, Sam Loyd) to kwadratowa mozaika złożona z siedmiu części – tanów, z których należy ułożyć zadane figury. Chińska nazwa tej łamigłówki oznacza „siedmiokrotną mądrość”, a po polsku była ona nazywana „łamigłówką siedmiu sztuczek”. Pierwsze opublikowane informacje o tangramach pochodzą z początku XIX w., ale sama łamigłówka jest z pewnością o wiele starsza. Do dziś w różnych wydawnictwach ukazało się ok. 2000 wzorów figur do ułożenia z siedmiu tanów.

Zasady układania tangramu są następujące: układana figura musi składać się ze wszystkich części figury wyjściowej, które można kłaść na dowolną stronę, ale elementy nie mogą na siebie zachodzić.

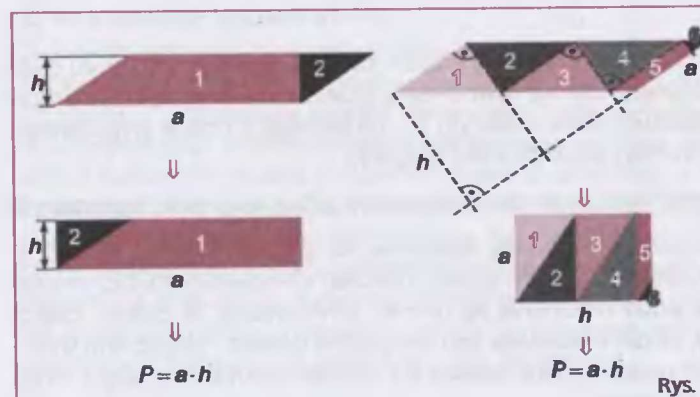
Podobne zasady wykorzystuje się w wielu łamigłówkach geometrycznych, a także w dowodach twierdzeń matematycznych.

Nożyczkowe wzory

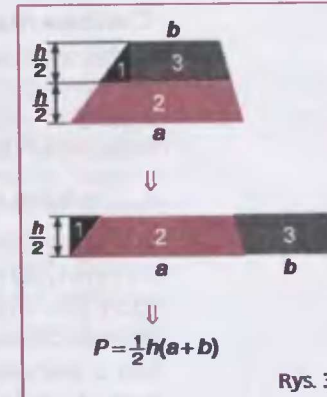
Przyjmijmy, że znamy wzór na pole prostokąta o bokach a i b . Stosując tylko metodę rozcinania figur i układania nowych z otrzymanych części można łatwo uzasadnić inne znane wzory na pola wielokątów. Na podstawie rys. 1 i 2 można wyprowadzić wzór na pole trójkąta oraz równoległoboku (dla dowolnej podstawy i opuszczonej na nią wysokości), rys. 3 i 4 pokazują, jak uzasadnić wzory na pola trapezu i deltoidu, natomiast rys. 5 pozwala wyprowadzić wzór na pole dowolnego czworokąta.



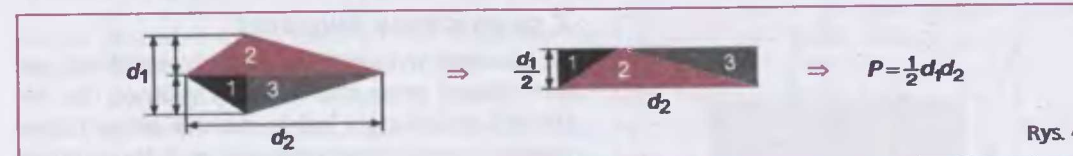
Rys. 1



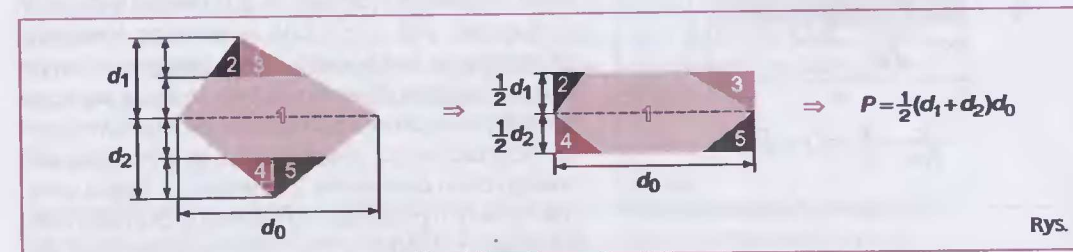
Rys. 2



Rys. 3

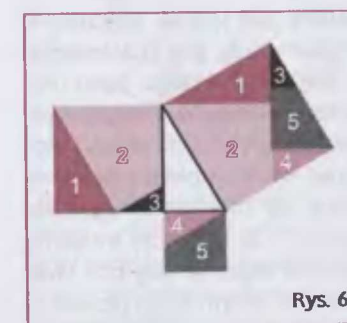


Rys. 4

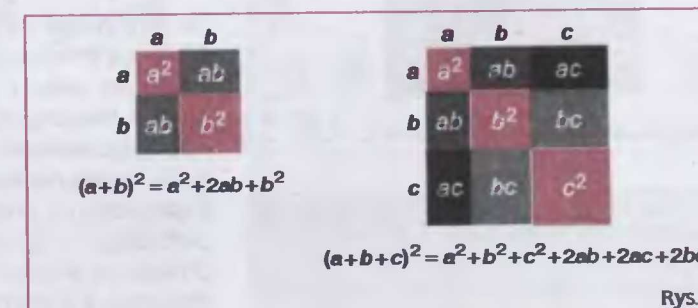


Rys. 5

Metodą tangramu można też udowodnić twierdzenie Pitagorasa (rys. 6) oraz uzasadnić różne tożsamości algebraiczne dla liczb dodatnich (np. rys. 7).



Rys. 6



Rys. 7

Równoważność przez rozcinanie

O dwóch figurach mówimy, że są równoważne przez rozcinanie, jeśli jedną z nich można pociąć na skończenie wiele części, z których można ułożyć (na zasadach tangramu) drugą figurę. Oczywiście figury równoważne przez rozcinanie mają jednakowe pola.

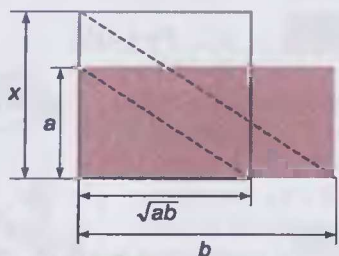
* Tego wzoru nie można wyprowadzić w sposób elementarny, nie stosując przejścia granicznego.

Ćwiczenia

1. Czy kwadrat może być równoważny przez rozcinianie kwadratowi o boku dłuższym o 1? Czy prostokąt może być równoważny prostokątowi o jednym boku dłuższym o 1? A kwadratowi o boku dłuższym o 1 od jednego z boków wyjściowego prostokąta? Jakie wymiary powinny mieć te figury?

2. Czy figura krzywoliniowa może być równoważna przez rozcinianie kwadratowi?

W poprzednim numerze (w artykule *Mierzenie pól cyrklem i linijką*) pisaliśmy o innym typie równoważności figur – figurach połowo równoważnych. Oczywiście figury równoważne przez rozcinianie są połowo równoważne. W dalszej części artykułu pokażemy, że dla wielokątów jest również na odwrót – mając dwa wielokąty o jednakowych polach można zawsze tak rozciąć jeden z nich, aby z otrzymanych części złożyć drugi.

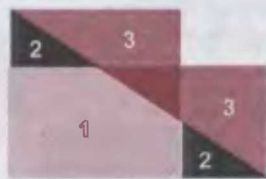


$$\frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

Rys. 8

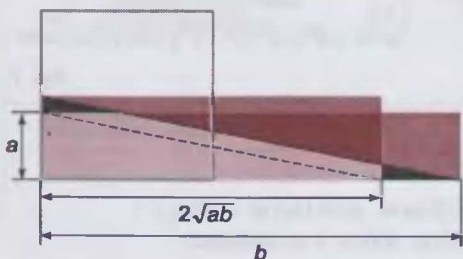
Z prostokąta kwadrat

Na początek wykażemy, że dowolny prostokąt jest równoważny przez rozcinianie kwadratowi. Dla niektórych prostokątów jest to zadanie łatwe. Odpowiednią konstrukcję przedstawia rys. 8. Na dłuższym boku prostokąta o bokach a i b odkładamy odcinek o długości $\sqrt{ab}$, czyli bok szukanego kwadratu. Otrzymany w ten sposób punkt łączymy z lewym górnym wierzchołkiem prostokąta, a przez jego prawy dolny wierzchołek prowadzimy prostą równoległą do poprzedniej aż do przecięcia z przedłużeniem lewego boku prostokąta. Z twierdzenia Talesa otrzymamy na tym przedłużeniu odcinek o długości boku szukanego kwadratu. Stąd otrzymujemy właściwe rozcięcie prostokąta – rys. 9 (wykazanie przystawiania odpowiednich trójkątów pozostawiamy Czytelnikom).



Rys. 9

Ta konstrukcja nie zawsze jest jednak wykonalna. Można ją zrealizować tylko wtedy, gdy bok kwadratu jest nie dłuższy od połowy dłuższego boku prostokąta (dlaczego?). Dla prostokątów niespełniających tego warunku (tzn. „długich” i „chudych”) możemy rozcinianie wykonać w kilku krokach. Najpierw sprowadzamy prostokąt do równoważnego, ale „krótszego” i „grubszego”. Tę operację możemy powtarzać, w zależności od tego, ile razy bok kwadratu daje się odłożyć na dłuższym boku prostokąta. Gdy ten nowy prostokąt stanie się odpowiednio krótki, rozciniamy go, aby uzyskać kwadrat. Rys. 10 przedstawia tę operację, gdy bok kwadratu daje się odłożyć dwukrotnie na dłuższym boku prostokąta. Nałożenie cięć z poszczególnych etapów na wyjściową figurę pozwala rozciąć ją na skończenie wiele części, z których można ułożyć kwadrat.



Rys. 10

Z wielokąta kwadrat

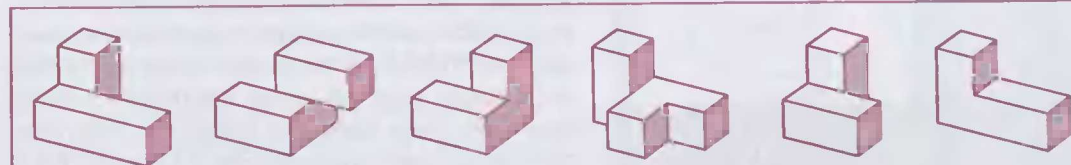
Z dotychczasowych rozważań widzimy, że dowolny trójkąt oraz dowolny czworokąt są równoważne przez rozcinianie kwadratowi (z każdego z nich można uzyskać prostokąt, a z prostokąta kwadrat, ostatecznie nakładamy wszystkie rozcięcia na wyjściową figurę). Dowolny wielokąt jest równoważny przez rozcinianie skończonej liczbie kwadratów, można go bowiem podzielić na trójkąty, a następnie rozciąć je i z każdego z nich złożyć kwadrat. Czy możliwe jest jednak, aby z części rozciętego wielokąta złożyć jeden kwadrat? Okazuje się, że tak. Wiemy już (patrz rys. 6), że figura będąca sumą dwóch kwadratów jest równoważna przez rozcinianie jednemu kwadratowi. Wykonując dodatkowe rozcięcia kwadratów uzyskanych z wyjściowego wielokąta, możemy ostatecznie złożyć z nich jeden kwadrat. Zatem dowolny wielokąt jest równoważny przez rozcinianie kwadratowi.

Twierdzenie Bolyai-Herwina

Każde dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez rozcinianie. Twierdzenie to udowodniło niezależnie dwóch matematyków: Węgier Farkas Bolyai (ojciec słynnego Jánoša – odkrywcy geometrii nieeuklidesowych) w 1832 r. i Niemiec Paul Herwin w 1833 r. Dowód jest prosty. Najpierw oba wielokąty rozciniamy tak, aby z części każdego z nich złożyć kwadrat (oczywiście będzie to taki sam kwadrat), a następnie nakładamy te rozcięcia kwadratu jedno na drugie. Z tak otrzymanych części możemy teraz złożyć wielokątów (poza prostokątem) możemy obliczyć w sposób elementarny (nie używając przejścia granicznego).

Twierdzenie Dehna

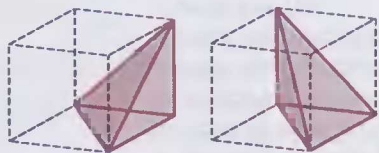
Pojęcie tangramu, a także równoważności figur przez rozcinianie możemy uogólnić na przestrzeń trójwymiarową. Jednym z najbardziej znanych przestrzennych tangramów jest łamigłówka Hugona Steinhausa (rys. 11).



Rys. 11. Z tych klocków należy złożyć sześcian

Dwie bryły są równoważne przez rozcinianie, jeśli jedną z nich można tak pociąć płaskimi cięciami, żeby z otrzymanych części złożyć drugą. Oczywiście bryły równoważne przez rozcinianie mają jednakowe objętości. Dla wielokątów było też na odwrót, a czy podobnie jest dla wielokątów? Takie pytanie postawił w swoim słynnym odczycie w 1900 r. matematyk niemiecki Dawid Hilbert. Był przekonany, że uda się na nie odpowiedzieć pozytywnie. Problem ten został rozstrzygnięty już w 1901 r. przez innego niemieckiego matematyka – Maxa Dehna.

Problemy Hilberta to lista najważniejszych zadań Hilberta pytań, jakie stały przed matematykami XX w. Ogłosił ją w 1900 r. podczas II Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Paryżu. Niektóre z pytań matematycy rozstrzygali od razu na sali obrad. Te, na które nie udało się odpowiedzieć (było ich 23), opublikowano i stały się one programem badawczym matematyków na XX w. Program ten został częściowo zrealizowany, ale 7 pytań pozostaje nadal bez odpowiedzi, wśród nich np. słynna hipoteza Riemanna o miejscach zerowych funkcji dżeta.



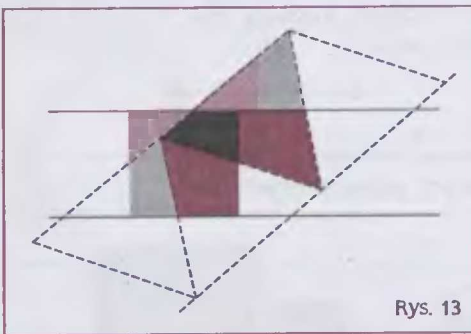
Rys. 12. Figura pierwsza jest równoważna przez rozcinanie sześciątowi, a druga nie

Niezmienność Dehna dla danego wielościanu o n krawędziach to liczba:

$$d_f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) l_i,$$

gdzie l_i to długość i -tej krawędzi, α_i jest rozwartością kąta dwuściennego przy tej krawędzi, a f jest dowolną funkcją ciągłą na $(0, \pi)$ spełniającą $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i $f(\pi) = 0$.

Ponieważ nie jest prawdziwy przestrzenny odpowiednik twierdzenia Bolyai-Herwina, nie da się wyprowadzić elementarnie wzoru na objętość ostrosłupa (i objętości innych wielościanów). Trzeba do tego użyć przejścia granicznego.



Rys. 13

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Stolarz ma deskę o wymiarach $0,80 \times 0,30$ m, ale potrzebuje deskę o wymiarach $1,20 \times 0,20$ m. Jak powinien rozpiłować posiadaną deskę?
2. Każdą z tych figur podziel na dwie części, z których można złożyć kwadrat.



3. Rozetnij siatkę sześciątka i z jej części ułóż trójkąt równoboczny.

Dehn zauważył, że jeśli obliczy się sumę iloczynów długości wszystkich krawędzi wielościanu i wartości pewnej funkcji rozwartości kątów dwuściennych przy tych krawędziach, to otrzymana liczba (d_f) nie zmienia się przy podziale wielościanu na części i złożeniu z nich nowej bryły. Okazało się, że istnieją wielościany o jednakowej objętości, które dla pewnej funkcji f dają różne wartości d_f , a więc nie są równoważne przez rozcinanie. Takie są dwa najprostsze wielościany foremne – czworościan i sześciątka. Także dwa niemal identyczne na pierwszy rzut oka czworościany z rys. 12 nie są równoważne.

W 1965 r. Jean Paul Sydler wykazał, że jeśli dwa wielościany mają równe objętości i równe niezmienniki Dehna dla wszystkich funkcji f (jest ich nieprzeliczalnie wiele), to są równoważne przez rozcinanie. W ten sposób rozstrzygnięto ostatecznie problem Hilberta.

Konstrukcje

Sposób konstruowania rozcięcia wielokąta, aby złożyć z jego części inny wielokąt, opisany w dowodzie twierdzenia Bolyai-Herwina ma znaczenie czysto teoretyczne, często bowiem wielokąt rozpada się przy tym na bardzo dużo części. W praktyce znaczenie mają podziały, które dają stosunkowo niewielką liczbę części. Nie ma jednak ogólnego sposobu znajdowania takich rozcięć. Jedną z możliwych do zastosowania technik jest próba takiego pocięcia obu figur, aby z części udało się ułożyć powtarzalny element pasa. Takie pasy nakładamy potem pod odpowiednim kątem i nanosimy cięcia. Rys. 13 przedstawia tę operację dla kwadratu i trójkąta równobocznego.

LITERATURA

- M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.
 M. Mikołajczyk, *Pola figur płaskich*, OBRPNiSS, Warszawa 1990.
 H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, WSiP, Warszawa 1989.
 M. Szurek, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa 1987.
 A. Wierzbic, *Papierowe dinozaury. Tangramy*, Kleks, Bielsko-Biała 2000.
 J. Zydler, *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

Małgorzata Mikołajczyk

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Wybrzeże Wyspiańskiego 27

50-370 Wrocław

www.pwr.wroc.pl

rekrutacja tel. (0-71) 320 27 78, fax: (0-71) 322 74 82



Politechnika Wrocławska proponuje uczniom szkół ponadgimnazjalnych, którzy zamierzają studiować na kierunkach, gdzie niezbędna jest dobra znajomość nauk ścisłych, udział w niżej wymienionych kursach, wykładach i konkursie. Mają one za zadanie uzupełnienie braków oraz ugruntowanie, a nawet poszerzenie, wiadomości z matematyki i fizyki.

♦ **Studium TALENT** poszerza i ugruntowuje wiadomości kandydatów na studia techniczne uzdolnionych w zakresie matematyki i fizyki. Absolwenci studium mają preferencje rekrutacyjne na wszystkie wydziały PWr. Zajęcia z matematyki wyższej (wybrane działy analizy matematycznej i algebry liniowej) oraz fizyki (wybrane działy fizyki ogólnej) odbywają się w wymiarze 2 godzin tygodniowo przez 2 semestry (od października do kwietnia), we Wrocławiu oraz trzech zamiejscowych ośrodkach dydaktycznych PWr: w Jeleniej Górze, Legnicy i Wałbrzychu. Studium jest bezpłatne. Szczegółowe informacje znajdują się na stronie internetowej <http://www.pwr.wroc.pl/files/w11/talent.htm>

♦ **Otwarte wykłady popularyzujące fizykę** adresowane są do uczniów szkół średnich. Rocznie (od grudnia do marca) organizowanych jest 10 wykładów będących połączeniem teorii i praktyki poprzez prezentacje, pokazy komputerowe oraz doświadczenia. Szczegółowe informacje znajdują się na stronie internetowej: <http://www.if.pwr.wroc.pl/pl/start.html>

♦ **Ogólnopolski Korespondencyjny Kurs Przygotowawczy z Matematyki** dla maturzystów i kandydatów na studia obejmuje 7 pisemnych prac kontrolnych po jednej w miesiącu (od października do kwietnia). Każda praca składa się z 8 zadań. Nauczyciele w formie pisemnych konsultacji udzielają szczegółowych informacji dotyczących metody rozwiązania i popełnionych błędów. Udział w kursie jest bezpłatny (oprócz kopert zwrotnych i znaczków). Zadania drukowane są w *Gazecie Wrocławskiej* i *Trybunie* w pierwszym tygodniu każdego miesiąca. Warunki uczestnictwa i zestaw zadań znajdują się na stronie internetowej: <http://im.pwr.wroc.pl/~kozicki/KURS/kurs.html>

♦ **Ogólnopolski Konkurs Gier Matematycznych i Logicznych** pod patronatem PWr jest adresowany do miłośników matematyki rekreacyjnej. Trwa od października do maja. Obowiązuje opłata wpisowa. Szczegółowe informacje znajdują się na stronie internetowej: <http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html>

♦ **Kursy przygotowawcze z matematyki** trwają przez 15 tygodni po 3 godziny tygodniowo, rozpoczynają się w listopadzie i styczniu. Kursy są płatne.

♦ **Kurs przygotowawczy z matematyki „Superekspres przedegzaminacyjny”** rozpoczyna się w drugiej połowie czerwca i obejmuje 30 godzin zajęć w ciągu 10 dni. Kurs jest płatny.

♦ **Kurs przygotowawczy z fizyki „Superekspres przedegzaminacyjny”** rozpoczyna się w drugiej połowie czerwca i obejmuje 30 godzin zajęć w ciągu 10 dni. Kurs jest płatny.

Szczegółowe informacje o trzech ostatnich kursach oraz zapisy w dziekanacie Wydziału Podstawowych Problemów Techniki PWr, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, bud. A-1, pok. 149 lub 150a, tel. (0-71) 320 25 23.

Punkt Torricellego

W poprzednim numerze w artykule „Wirujące trójkąty” prezentowaliśmy zadanie o Mateuszu zagubionym w lesie*. Postawiliśmy też pytanie, w którym miejscu w trójkątnym lesie (niekoniecznie równobocznym) powinien stanąć Mateusz, aby suma jego odległości od wierzchołków była najmniejsza. Poniżej zajmiemy się tym właśnie problemem.

Ćwiczenie 1

Która z sieci dróg łączących miasta A, B i C (rys. 1) jest najkrótsza?

Ćwiczenie 2

Jak wygląda zbiór punktów, z których widać dany odcinek pod kątem:
a) 90° , b) 60° , c) 120° , d) 180° ?

Optymalny punkt

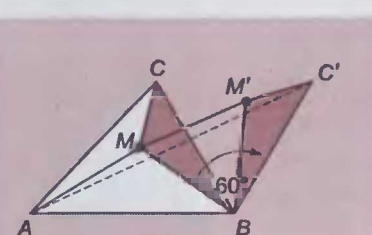
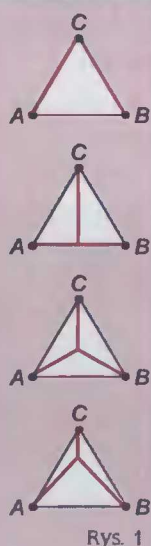
Punkt o najmniejszej sumie odległości od wierzchołków trójkąta nazywa się punktem Torricellego, od nazwiska włoskiego matematyka i fizyka, który pierwszy rozwiązał to zadanie w XVI wieku. Oczywiście taki punkt nie może leżeć na zewnątrz trójkąta. Dlaczego?

Wewnątrz trójkąta ABC wybieramy dowolny punkt M i łączymy go z wierzchołkami. Jeden z powstałych w ten sposób trójkątów, np. BCM obracamy wokół B o 60° (rys. 2). Zauważmy, że trójkąt MBM' jest równoramienny ($BM = BM'$) i $\angle MBM' = 60^\circ$, jest to więc trójkąt równoboczny, a wobec tego $MB = MM'$. Z konstrukcji mamy też $MC = M'C'$, zatem szukaną sumę odległości punktu M od wierzchołków trójkąta można zapisać jako:

$$MA + MB + MC = AM + MM' + M'C'.$$

Łamana AMM'C' osiąga minimalną długość, gdy jest odcinkiem AC'. Położenie punktu C' nie zależy od wyboru punktu M. Zatem punkt M należy wybrać tak, aby M i M' należały do odcinka AC'. Wtedy kąty BM'C' oraz BMA muszą mieć po 120° (jako przyległe do kątów o mierze 60°). Na tej samej zasadzie również kąty BMC i AMC mają po 120° . Zatem szukany punkt M ma tę własność, że wszystkie boki trójkąta widać z niego pod kątem 120° . Czy taki punkt istnieje dla każdego trójkąta? A jeśli istnieje, to jak go wyznaczyć?

Rys. 2



* Piotr Kumor zwrócił uwagę, że zadanie o Mateuszu zagubionym w lesie można rozwiązać korzystając ze wzoru $3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, w którym a, b, c to odległości pewnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego od boków, a d jest długością boku tego trójkąta. Uzasadnienie tego wzoru można znaleźć w Zbiorze zadań z olimpiad matematycznych J. Browkina, t. VI.

Istnienie

Zbiór punktów, z których widać dany odcinek pod kątem 120° stanowi łuk okręgu przechodzącego przez końce tego odcinka (rys. 3). Jak skonstruować taki okrąg? Szukany przez nas punkt leży na przecięciu odpowiednich (poprowadzonych wewnątrz trójkąta) takich łuków dla dwóch sąsiednich boków trójkąta. Wówczas widać z niego te dwa, a więc i trzeci bok trójkąta, pod kątem 120° .

Można jednak zastanawiać się, czy taki punkt przecięcia zawsze istnieje. Ponieważ kreślone tu okręgi mają jeden punkt wspólny (wierzchołek trójkąta) i nie są styczne, to muszą mieć jeszcze jeden punkt wspólny. Czy zawsze leży on jednak na wewnętrznych łukach?

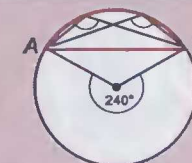
Łuki, z których widać boki trójkąta pod kątem 120° przetną się wewnątrz trójkąta tylko wtedy, jeśli kąt między bokami, na których je budujemy, nie przekracza 120° . Dla przypadku granicznego (120°) ich jedynym punktem wspólnym jest wspólny wierzchołek tych boków i to on jest punktem Torricellego takiego trójkąta. Dlaczego? A jak jest dla kątów o większej rozwartości? (Wskazówka: pomocne mogą być znowu „wirujące trójkąty”).

Konstrukcja

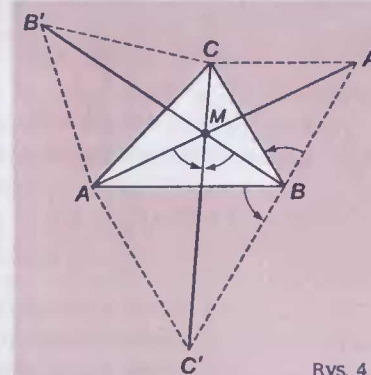
Punkt Torricellego można wyznaczyć konstrukcyjnie korzystając z powyższego dowodu jego istnienia, daje się to jednak zrobić również nieco prościej. Zbudujmy mianowicie na bokach na zewnątrz danego trójkąta trójkąty równoboczne i połączmy ich wierzchołki leżące na zewnątrz wyjściowego trójkąta z przeciwległymi wierzchołkami tego trójkąta (rys. 4). Trzy powstałe w ten sposób odcinki przecinają się właśnie w punkcie Torricellego! Aby to sprawdzić, wykonajmy obrót odcinka AA' o 60° w lewo wokół B. W obrocie tym A przechodzi na C', a A' na C, co oznacza, że odcinek AA' przechodzi na C'C, więc kąt między nimi to kąt obrotu, czyli 60° .

Powtarzając to rozumowanie dla odcinka BB' i obrotu wokół A, otrzymujemy, że $\angle AMC = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Analogiczne rozumowanie wykazuje, że również $\angle AMB = 120^\circ$, a co za tym idzie, $\angle BMC$ także. Jest to więc punkt Torricellego, ale opisana konstrukcja daje go tylko dla trójkątów o największym kącie nieprzekraczającym 120° . Dlaczego? Co dzieje się dla pozostałych trójkątów? Gdzie wtedy leży punkt Torricellego?

Małgorzata Mikołajczyk



Rys. 3



Rys. 4

Zadania dla Czytelników

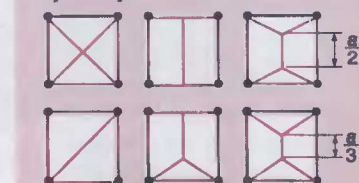


Zadanie 1. Znaleźć w trójkącie punkt o najmniejszej sumie odległości od boków.

Zadanie 2*. Znaleźć w trójkącie punkt o najmniejszej sumie odległości od wierzchołków i boków.

Zadanie 3. Znaleźć punkt Torricellego dla czworokąta.

Zadanie 4. Która z podanych sieci dróg łączących wierzchołki kwadratu jest najkrótsza?



Zadanie 5*. Połączyć wierzchołki czworokąta siecią dróg o minimalnej długości.

Jeśli ktoś z Czytelników znajdzie rozwiązanie zadań „z gwiazdką” chętnie opublikujemy je w formie artykułu w jednym z najbliższych numerów MMM.

Wyπjmy za zdrowie π

14.03. (w notacji amerykańskiej 3.14) obchodzony był Międzynarodowy Dzień Liczby π . „Wynalazek” ten przywędrował do nas z USA, gdzie tzw. Pi-Day obchodzi wiele szkół. Przyjął się on także w niektórych szkołach w Polsce. Warto przypomnieć, że dzień ten jest jednocześnie rocznicą urodzin Wacława Sierpińskiego i Alberta Einsteina.

Liczba π (wyrażająca długość jednostkowego półokręgu lub pole jednostkowego koła) interesuje matematyków od dawna. Dawniej nazywano ją **ludolfiną**, na pamiątkę niemieckiego matematyka i szermierza **Ludolfa van Ceulena** [wym. fan kölena], który w 1610 r. obliczył π z dokładnością do 35 miejsc po przecinku, przybliżając obwód koła z góry i z dołu obwodami wielokątów foremnych o 2^{62} bokach: wpisanego i opisanego na tym kole (w III w. p.n.e. analogiczną metodą dla 96-kątów foremnych grecki matematyk Archimedes oszacował π z dokładnością do 0,002).

Gdyby orbita Plutona była okręgiem, to jak dokładna wartość π byłaby potrzebna, żeby wyznaczyć jej długość z dokładnością do 1 mm?

Wyłowione z sieci (2)

Strona π

<http://www.cecm.sfu.ca/pi/pl.html>

To jedno z największych opracowań na temat liczby π . Na stronie znajdziemy prawie wszystko: historię jej obliczania z coraz większą dokładnością wraz z opisem najnowszych osiągnięć w tej dziedzinie, programy obliczające π i biografie ludzi zasłużonych dla tych obliczeń, a także ok. 500 mln cyfr jej rozwinięcia.

cd. s. [2 π^2]

Oznaczanie liczby π tą literą greckiego alfabetu (pierwszą literą greckiego słowa *perímetros*, co znaczy obwód) zostało wprowadzone na początku XVIII w. przez angielskiego matematyka Williama Jonesa, a spopularyzowane na skalę międzynarodową w pracy Leonarda Eulera z 1736 r.

Do dziś obliczono π z dokładnością do ponad biliona miejsc dziesiętnych. Można by zapytać: „Tylko po co?”. Przecież dla potrzeb techniki wystarcza znajomość 3–4 miejsc dziesiętnych, a w obliczeniach astronomicznych, gdzie występują duże liczby (które powodują duże błędy), wystarcza zupełnie 6–8 miejsc.

Oczywistą odpowiedzią jest, że to świetna reklama dla firm produkujących komputerowe procesory. Nie należy bowiem sądzić, że dla obliczenia π z dużą dokładnością wystarczy włączyć komputer i cierpliwie czekać. Pojemność pamięci jest przecież ograniczona, a rachunki i zapis liczb tylko przybliżone.

Istnieje jednak wiele interesujących teoretycznych pytań dotyczących rozwinięcia liczby π . Wiadomo, że rozwinięcie to nie jest okresowe (bo π jest liczbą niewymierną, co udowodnił niemiecki matematyk Jan Lambert w 1768 r.), ale może istnieć jakaś prawidłowość w pojawianiu się kolejnych cyfr. Czy wszystkie cyfry pojawiają się tak samo często? Czy wszystkie pojawiają się nieskończenie wiele razy? Czy w rozwinięciu dziesiętnym π można odnaleźć wszystkie liczby naturalne?

Liczbie π poświęciła jeden ze swoich wierszy nasza noblistka Wisława Szymborska. Jest to sformułowana w poetycki sposób głęboka hipoteza matematyczna. Czy wiesz, jaka?

Liczba Pi

Podziwu godna liczba Pi
trzy koma jeden cztery jeden.

Wszystkie jej dalsze cyfry też są początkowe

pięć dziewięć dwa, ponieważ nigdy się nie kończy.

Nie pozwala się objąć sześć pięć trzy pięć spojrzeniem,

osiem dziewięć obliczeniem,

siedem dziewięć wyobraźnią,

a nawet trzy dwa trzy osiem żartem, czyli porównaniem

cztery sześć do czegośkolwiek

dwa sześć cztery trzy na świecie.

Najdłuższy ziemski wąż po kilkunastu metrach się urywa.

Podobnie, choć trochę później, czynią węże bajeczne.

Korowód cyfr składających się na liczbę Pi

nie zatrzymuje się na brzegu kartki,

potrafi ciągnąć się po stole, przez powietrze,

przez mur, liść, gniazdo ptasie, chmury, prosto w niebo,

przez całą nieba wzdłość i bezdenność.

O, jak krótki, wprost myśli, jest warkocz komety!

Jak wąty promień gwiazdy, że zakrzywia się w łada przestrzeni!

A tu dwa trzy piętnaście trzysta dziewiętnaście

mój numer telefonu twój numer koszuli

rok tysiąc dziewięćset siedemdziesiąt trzeci szóste piętro

ilość mieszkańców sześćdziesiąt pięć groszy

obwód w biodrach dwa palce szarada i szyfr,

w którym słowiczku mój a leć, a piej

oraz uprasza się zachować spokój,

a także ziemia i niebo przeminą,

ale nie liczba Pi, co to to nie,

ona wciąż swoje niezłe jeszcze pięć,

nie byle jakie osiem,

nie ostatnie siedem,

przynaglając, ach przynaglając gnuśną wieczność

do trwania.

Hipoteza Szymborskiej sformułowana w języku matematycznym mówi, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby π pojawiają się wszystkie liczby naturalne, nie wiadomo jednak, czy stwierdzenie takie jest prawdziwe.

Dziękujemy pani Wisławie Szymborskiej za przekazanie nam cennej konkursowej nagrody. Za pomoc dziękujemy również panu Michałowi Rusinkowi.

Zadania dla Czytelników



1. Nazwijmy liczbami Szymborskiej takie liczby, które zawierają w swoim rozwinięciu dziesiętnym wszystkie liczby naturalne. Liczbą Szymborskiej jest np. liczba

0,123456789101112131415...

a) Na jakich miejscach w tej liczbie występuje pięć pierwszych razy cyfra 7?

b) Jaka cyfra jest na 33. miejscu po przecinku? A na 333.?

c) Ile razy w tej liczbie występuje 13?

d) Podaj inne przykłady liczb Szymborskiej. Czy istnieją takie liczby wymierne?

e) Czy można podać przykład liczby Szymborskiej z przedziału $[0,234; 0,235]$? A z przedziału $[\pi, \pi + \frac{1}{7}]$?

2. Nazwijmy liczbami Szymborskiej stopnia k liczby, w których zapisie dziesiętnym można odnaleźć liczby naturalne $1, 2, \dots, k$ i które mają najmniejszą możliwą liczbę cyfr.

a) Ile cyfr mają liczby Szymborskiej stopnia 5? A stopnia 12?

b) Ile jest liczb Szymborskiej stopnia 10? 11? 12? 13? 19?

c) Jaka jest najmniejsza liczba Szymborskiej stopnia 100?

d) Czy suma cyfr każdej liczby Szymborskiej danego stopnia jest taka sama?

e) Podaj jak najlepsze oszacowanie dla liczby cyfr liczby Szymborskiej stopnia k .

Na rozwiązanie zadań czekamy do końca czerwca.

Tym razem nagrodą jest tomik poezji Wisławy Szymborskiej z autografem!

Dla zwycięzcy konkursu „Nagrody filozofów matematyki” z autografem i najlepszymi życzeniami na urodziny – Witoldan Bruno Kowalski

π BUSY

π 2,71... 

π 

 π  

 π $\frac{1}{60}$ min

k $\rho\pi$ 

π  0 = 2,71...

 π 

k π 11 ?
22,99

Δ π 

Ponieważ do tej pory nie zauważono żadnej regularności w pojawianiu się cyfr rozwinięcia liczby π , modne stało się układanie wierszyków, które pozwalają łatwo podać początkowe cyfry. Wystarczy nauczyć się takiego wierszyka na pamięć, a później zastąpić każdy wyraz liczbą jego liter (myślnik zastępujemy zerem). Jednym z najciekawszych i najbardziej znanych mnemotechnicznych* wierszyków o π jest utwór Witolda Rybczyńskiego.

Daj, o pani, o boska Mnemozyna*,
pi liczbę, którą zowią też ponętnie ludolfiną,
pamięci przekazać tak, by jej dowolnie
oraz szybko do pomocy użyć,
gdy się problemu nie da inaczej rozwiązać.
Pauza – to zastąpić liczbami.

W XVII wieku zarzucono geometryczne sposoby obliczania kolejnych cyfr rozwinięcia π i zwrócono się w stronę teorii szeregów. Najbardziej chyba znanym przykładem szeregu związanego z π jest tzw. naprzemienny szereg Leibniza (otrzymany jako wartość w jedynce szeregu Maclaurina funkcji $\arctg x$):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Mimo że wzór jest bardzo prosty, nie ma praktycznego znaczenia ze względu na niesłychaną powolność zbliżania się sum częściowych do granicy. Dokładność rzędu czterech miejsc po przecinku dostaniemy dopiero po uwzględnieniu... pięciu tysięcy wyrazów! Istnieją jednak inne wzory na π , dające ciągi szybciej zbieżne. To dzięki nim możliwe było wyznaczenie dalekich cyfr rozwinięcia dziesiątnej tej liczby.

Do niewątpliwych pechowców wśród badaczy liczby π zaliczyć należy Anglika, Williama Shanksa. W 1853 roku ogłosił on wyniki swoich obliczeń aż do... 530. miejsca po przecinku (pamiętajmy, że robił je ołówkiem na papierze!). Pracując przez następnych 20 lat zdołał obliczyć kolejnych 177 cyfr. Niestety okazało się, że poprzedni wynik zawierał błąd na 528. miejscu i wszystko można było wyrzucić do kosza. Na szczęście Shanks wykrycia tego błędu nie doczekał.

Jego następcy zaprzęgli już do pracy maszyny liczące. Z 1948 roku pochodzą pierwsze wyniki otrzymane za pomocą arytmometru (to taka maszynka z korbką). A. Smith i J. Wrench obliczyli w ten sposób 808 cyfr rozwinięcia π (myląc się jednak od 723. miejsca). Potem przyszła kolej na maszyny elektroniczne i rachunki nabrały tempa. Prekursorem był tu G. Reitwiesner, który w 1949 roku na

* Mnemozyna to grecka bogini pamięci. Od jej imienia pochodzi też słowo mnemotechnika. Są to sposoby ułatwiające zapamiętywanie jakiegoś materiału. Mnemotechniką jest np. odliczanie długości kolejnych miasek na kostkach zaciśniętej pięści. A może Czytelnicy podzielą się z nami pomysłami innych chwytów mnemotechnicznych (w matematyce i nie tylko). Najciekawsze pomysły nagrodzimy.

d π S

2,71... π C t 

16 ?
32,07 π 2,71...  a

π C $\dots (0-32)3260815$

maszynie ENIAC obliczył 2037 cyfr. Powstało pytanie, skąd matematycy mają wiedzieć, czy otrzymany w ten sposób wynik jest poprawny. Otóż za „sprawdzenie” przyjmuje się otrzymanie tego samego wyniku inną metodą i na innej maszynie. I tak pierwszy milion cyfr rozwinięcia π został przekroczony w 1974 roku, a sprawdzony dopiero po 11 latach.

Magia liczby π działa nadal. Hipotezami dotyczącymi jej rozwinięcia dziesiątnej zajmuje się wielu zawodowych matematyków i informatyków, a także amatorów-pasjonatów. Dokonali oni kilku ciekawych odkryć, np. po obejrzeniu miliona cyfr okazało się, że częstości występowania poszczególnych cyfr są bardzo bliskie 100 000 (co potwierdza hipotezę, że każda cyfra występuje w rozwinięciu π nieskończenie wiele razy, a gęstość jej występowania jest równa 1/10). Obserwacje te są teraz uogólniane na dowolne skończone układy cyfr, więc może za jakiś czas „twierdzenie Szymborskiej” również doczeka się dowodu.

opr. MM, MŚ

Odpowiedzi do zadań z artykułu Nierówność nierówność nierówna

Szacujemy przez:

a) $\frac{1002}{2004}$.

b) $\frac{20}{100} + \frac{20}{120} + \frac{20}{140} + \frac{20}{160} + \frac{20}{180}$.

c) $\frac{100}{1100} + \frac{100}{1200} + \frac{100}{1300} + \frac{100}{1400} + \frac{100}{1500} + \frac{100}{1600} + \frac{100}{1700} + \frac{100}{1800} + \frac{100}{1900} + \frac{100}{2000}$

d) $\frac{200}{1000} + \frac{200}{1200} + \frac{200}{1400} + \frac{200}{1600} + \frac{200}{1800}$

e) Niech $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121}$. Wówczas $A > \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120}$, co po wymnożeniu stronami przez poprzednią równość daje $A^2 > \frac{1}{121}$.

e) Po lewej mamy $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{17}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} \right) + \dots +$
 $+ \left(\frac{1}{\sqrt{1851}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1935}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1937}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2003}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2004} \right) >$
 $> \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{43}{43} + \frac{43}{44} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2004} \right) =$
 $= 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} + \frac{6}{6} + \dots + \frac{43}{43} + \frac{44}{44} + \left(\frac{1}{46} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2004} \right).$

f) Lewa strona jest równa $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \left(\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} \right) + \frac{1}{2003} \right) <$
 $< \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{20} < 0,34 + 0,05 < 0,4.$

g) Szacowana suma ułamków to $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$

Podciągnij się z ciągów



1, 2, 3, 4, 5, ...; 2, 4, 6, 8, 10, ...; 5, 10, 15, 20, 25, ... to najprostsze przykłady ciągów arytmetycznych, czyli takich, w których różnica sąsiednich wyrazów jest stała. W artykule zajmiemy się badaniem pewnych własności rosnących ciągów arytmetycznych liczb naturalnych. W szkole średniej rozwiązuje się wiele zadań dotyczących ciągów arytmetycznych, jednak rozpatrywane niżej problemy w zasadzie nie występują w znanych podręcznikach.

Problem 1

Czy istnieją dwa rosnące ciągi arytmetyczne liczb naturalnych, takie że każdy wyraz pierwszego ciągu jest względnie pierwszy z każdym wyrazem drugiego ciągu? Przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$.

Rozwiązanie

Niech (a_n) i (b_n) będą dowolnymi rosnącymi ciągami liczb naturalnych o różnicach odpowiednio r_a i r_b .

Niech $k = a_1^2 b_1 r_b + 1$ i $m = a_1 b_1^2 r_a + 1$.

Wówczas $a_k = a_1 + (k-1)r_a = a_1 + a_1^2 b_1 r_b r_a = a_1(1 + a_1 b_1 r_b r_a)$

oraz $b_m = b_1 + (m-1)r_b = b_1 + a_1 b_1^2 r_a r_b = b_1(1 + a_1 b_1 r_a r_b)$.

Widać, że wyrazy a_k i b_m mają wspólny dzielnik $1 + a_1 b_1 r_a r_b$ (większy od 1), więc nie są względnie pierwsze. Wobec tego odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

Problem 2

Liczbę naturalną większą od 1 nazywamy bezkwadratową wtedy, gdy nie jest podzielna przez kwadrat liczby naturalnej większej od 1. Czy istnieje nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny liczb bezkwadratowych?

Rozwiązanie

Rozważmy wyraz ciągu (a_n) o numerze $k = a_1(r+2)+1$. Wówczas

$$a_k = a_1 + (k-1)r = a_1 + a_1(r+2)r = a_1(1+r^2+2r) = a_1(1+r)^2.$$

Jak widać, wyraz a_k nie jest liczbą bezkwadratową, więc odpowiedź jest negatywna.

Problem 3

Wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą nie dzielącą różnicy r , to nieskończenie wiele wyrazów każdego rosnącego ciągu arytmetycznego liczb naturalnych jest podzielnych przez p .

Rozwiązanie

Liczy p i r są względnie pierwsze, więc istnieją liczby naturalne s i t takie, że $ps - rt = 1$ (patrz lemat).

Niech $n_k = (pk+t)a_1+1$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Wtedy

$$a_{n_k} = a_1 + (n_k - 1)r = a_1 + (pk+t)a_1 r =$$

$$= (1 + pkr + rt)a_1 = (ps + pkr)a_1 = p(s + kr)a_1$$

dla $k = 1, 2, 3, \dots$, więc liczby te dzielą się przez p .

Problem 4

Wykazać, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej m nieskończenie wiele wyrazów każdego rosnącego ciągu liczb naturalnych jest podzielnych przez m -te potęgi liczb naturalnych większych od 1.

Rozwiązanie

Niech $n_k = \frac{a_1((kr+1)^m - 1)}{r} + 1$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$ i $r > 0$.

Liczy n_k są naturalne (dlaczego?) i mamy

$$a_{n_k} = a_1 + (n_k - 1)r = a_1 + a_1((kr+1)^m - 1) = (kr+1)^m a_1$$

dla $k = 1, 2, 3, \dots$, więc liczby te spełniają podany warunek.

Problem 5

Wykazać, że dla każdego $n \geq 3$ istnieje n -wyrazowy rosnący ciąg arytmetyczny liczb naturalnych, w którym każde dwa wyrazy są względnie pierwsze. Czy istnieje nieskończony ciąg o tej własności?

Rozwiązanie

Niech $n \geq 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Przyjmijmy $a_k = 1 + k \cdot n!$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$. Tak określony ciąg (a_k) jest rosnącym ciągiem arytmetycznym (o różnicy $n!$) składającym się z liczb naturalnych. Wykażemy, że wyrazy a_i oraz a_j , gdzie $1 \leq i < j \leq n$, są względnie pierwsze. Załóżmy, że wyrazy te nie są względnie pierwsze. Wówczas istnieje liczba p taka, że $p|a_i$ oraz $p|a_j$. Wynika stąd, że

$$p|(a_j - a_i) = (1+j \cdot n!) - (1+i \cdot n!) = (j-i) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Ponieważ $1 \leq j-i < n$, więc p jest dzielnikiem któregoś z liczb $1, 2, \dots, n$. Zatem $p|n!$ i stąd $p|i \cdot n!$. Wobec tego $p|(a_i - i \cdot n!) = 1$, skąd $p = 1$, co jest niemożliwe, gdyż p jest liczbą pierwszą.

Wykażemy teraz, że nie istnieje ciąg nieskończony o podanej własności. Istotnie, niech (a_n) będzie dowolnym rosnącym ciągiem arytmetycznym o różnicy $r > 0$. Ponieważ $a_2 > a_1 \geq 1$, więc $a_2 > 1$. Istnieje zatem liczba pierwsza q taka, że $q|a_2$. Mamy $a_{q+2} = a_2 + qr$. Wobec tego $q|a_{q+2}$ i w konsekwencji wyrazy a_2 i a_{q+2} nie są względnie pierwsze.

Lemat

Dla dowolnych różnych od zera liczb całkowitych a i b istnieją liczby całkowite x i y , takie że $ax + by = \text{NWD}(a, b)$.

Dowód

Istnienie liczb x i y wykażemy za pomocą algorytmu Euklidesa (powtarzamy dzielenie z resztą). Dla uproszczenia założmy, że kończy się on po 4 krokach (tzn. piątą resztą jest równa 0).

Mamy:

$$\begin{array}{ll} a : b = q_0, r_1, & \text{czyli} \quad a = q_0 b + r_1, \\ b : r_1 = q_1, r_2, & b = q_1 r_1 + r_2, \\ r_1 : r_2 = q_2, r_3, & r_1 = q_2 r_2 + r_3, \\ r_2 : r_3 = q_3, r_4, & r_2 = q_3 r_3 + r_4, \\ r_3 : r_4 = q_4, r_0. & r_3 = q_4 r_4 + 0. \end{array}$$

Wtedy $r_4 = \text{NWD}(a, b)$ i mamy

$$r_4 = r_2 - q_3 r_3.$$

ale $r_3 = r_1 - q_2 r_2$

i podstawiając otrzymujemy:

$$r_4 = r_2 - q_3(r_1 - q_2 r_2) = -q_3 r_1 + (1 + q_2 q_3) r_2$$

ale $r_2 = b - q_1 r_1$, więc

$$\begin{aligned} r_4 &= -q_3 r_1 + (1 + q_2 q_3)(b - q_1 r_1) = \\ &= (1 + q_2 q_3)b - (q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3)r_1 \end{aligned}$$

ale $r_1 = a - q_0 b$, więc

$$\begin{aligned} r_4 &= (1 + q_2 q_3)b - (q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3)(a - q_0 b) = \\ &= \underbrace{-(q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3)}_x a + \underbrace{(1 + q_2 q_3 + q_0 q_1 + q_0 q_3 + q_0 q_1 q_2 q_3)}_y b \end{aligned}$$

Zadania dla Czytelników



1. Czy istnieje ciąg arytmetyczny, którego co trzeci wyraz jest kwadratem liczby naturalnej?

2. Czy istnieje rosnący ciąg arytmetyczny liczb naturalnych, w którym żaden wyraz nie jest potęgą (liczby naturalnej o wykładniku naturalnym większym od 1)?

3. Wykazać, że dowolny rosnący ciąg arytmetyczny liczb naturalnych zawiera nieskończenie wiele wyrazów posiadających te same dzielniki pierwsze.

Witold Bednarek

Matematyczne podróże

Kinematyka to najczęściej wykorzystywany w zadaniach matematycznych dział fizyki. Niektóre z tych zadań, np. o pociągach jadących z miasta A do B, okryły się przez lata niechlubną sławą. A jednak prosta zależność między drogą, prędkością i czasem może być też tematem ciekawych i pouczających zadań.

Zadanie 1. Podniebny dylemat

Miasta Awanturka i Bombonierka są odległe o 100 km, utrzymują jednak regularne połączenia lotnicze. Co zajmie więcej czasu: lot z Awanturki do Bombonierki i z powrotem przy silnym wietrze wiejącym w kierunku z A do B czy ta sama podróż, przy bezwietrznej pogodzie?

Rozwiązanie

Niech s oznacza prędkość samolotu, a w – prędkość wiatru wyrażone w kilometrach na godzinę i załóżmy, że prędkości te są stałe. Oczywiście $s > w$. Podróż z Awanturki do Bombonierki zajmie $t_1 = \frac{100}{s+w}$ godzin, a z powrotem $t_2 = \frac{100}{s-w}$ godzin. Cała podróż trwa

$$t_1 + t_2 = \frac{100}{s+w} + \frac{100}{s-w} = \frac{200s}{s^2 - w^2} = \frac{200}{s - \frac{w^2}{s}} \text{ godzin.}$$

Natomiast czas tej podróży w dzień bezwietrzny to $\frac{200}{s}$ godzin. Mianownik pierwszego ułamka jest mniejszy niż mianownik drugiego, więc pierwszy ułamek jest większy. Zatem podróż w wietrzny dzień trwa krócej i co ciekawe, im silniejszy wiatr tym lepiej!

Waldemar Górski

Zadanie 2. Meksykański wyścig

Z Sierra Madre do El Paso można dotrzeć pieszo lub dyliżansem, który w drodze ma 20-minutowy postój w miejscu odległym od Sierra Madre o 5 km. Joe i Eddie są starymi przyjaciółmi. Mają wiele wspólnych nawyków, nawet chodzą równie szybko. Pewnego dnia wybrali się w podróż. Eddie pojechał dyliżansem do postoju, a dalej poszedł pieszo. Joe najpierw szedł pieszo i do postoju doszedł akurat w chwili, gdy dyliżans odjeżdżał! Wsiadł i dalej podróżował już komfortowo, paląc cygaro i rozcierając obolałe nogi. Dyliżans jechał wolno, bo był załadowany ciężkimi bagażami. Po jakimś czasie Joe zobaczył przez okno idącego przyjaciela. Okazało się, iż Joe przybył do El Paso 12 minut wcześniej niż Eddie. Jaka odległość dzieli te miasteczka? Gdzie Joe minął Eddiego?

Rozwiązanie

Niech x będzie szukaną odległością (w km), v_1 prędkością pieszo (Joe i Eddiego), a v_2 prędkością dyliżansu (w km/h).

Ponieważ Joe dotarł do postoju 20 minut później niż dyliżans z Eddiego:

$$\frac{5}{v_2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{v_1}, \text{ co daje } \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = \frac{1}{15}.$$

Porównajmy teraz czasy, jakie zajęła obu przyjaciół podróż:

$$\underbrace{\frac{5}{v_1} + \frac{x-5}{v_2}}_{\text{Joe}} + \frac{1}{5} = \underbrace{\frac{5}{v_2} + \frac{x-5}{v_1}}_{\text{Eddie}}$$

co można zapisać jako:

$$5 \cdot \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) + \frac{1}{5} = (x-5) \cdot \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right).$$

Stąd $\frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{x-5}{15}$ i $x = 13$ km.

W ten sam sposób można obliczyć, że Joe minął Eddiego w miejscu odległym od El Paso o 3 km.

Paweł Kubit

Zadanie 3. Maksymalna szybkość

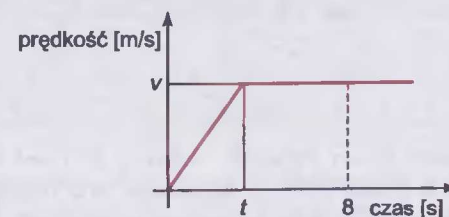
Podczas zawodów mistrz świata John Benson uzyskał w biegu na 100 m czas 8 s. Pierwszą trzecią część drogi biegł ruchem jednostajnie przyspieszonym, a dalej z jednostajną prędkością. Oblicz jego maksymalną szybkość na bieżni. Czy John mógłby w mieście dogonić samochód?

Rozwiązanie

Niech v oznacza szukaną prędkość w m/s, a t to czas, w jakim John przebiegł $\frac{1}{3}$ drogi (w s).

Droga to pole pod wykresem prędkości (patrz rys.), więc

$$\frac{vt}{2} = \frac{100}{3} \text{ oraz } v(8-t) = \frac{2}{3} \cdot 100.$$



Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymujemy $8v = \frac{4}{3} \cdot 100$, co daje $v = \frac{50}{3} \approx 16,7$ m/s ≈ 60 km/h.

Michał Śliwiński

Wytłócone z sieci (4)

Pedagoguery Software Inc.

<http://www.peds.com>

Na tej stronie można znaleźć cztery ciekawe programy matematyczne, które można bezpośrednio ściągnąć. Mogą pracować na komputerze z Windows lub MacOS. GrafEQ pozwala na rysowanie wykresów funkcji zapisywanych w naturalny sposób, PolyPro – na oglądanie, obracanie i rozkładanie (do uzyskania siatki) stu kilkudziesięciu różnych brył, a Tess służy do tworzenia mozaik o dowolnym zadany typie symetrii. Co roku firma Pedagoguery Software Inc. organizuje konkursy na najlepsze kompozycje uzyskane za pomocą tego programu.

Programowanie dynamiczne

Programowanie dynamiczne to jedna z metod, jaką można posługiwać się podczas podejmowania skomplikowanych decyzji. Jest to dziedzina zaliczana do badań operacyjnych, które stanowią jeden z najmłodszych działów matematyki. Powstał on w czasie II wojny światowej i od tamtego czasu bardzo intensywnie się rozwija. Poza programowaniem dynamicznym badania operacyjne zajmują się takimi zagadnieniami jak programowanie liniowe, teoria kolejek, teoria gier i innymi. Jest to dział matematyki wyższej, od którego studenci dostają często gęsiejsze skórki, jednak my prezentujemy go na bardzo prostym przykładzie w pełni zrozumiałym dla gimnazjalistów. Zadanie to może być również ciekawym wyzwaniem dla informatyków – jak stworzyć program do rozwiązywania podobnych problemów automatycznie.

Zadanie 1

Pan Busse został zatrudniony w dużym salonie meblowym w stolicy Dolnej Trabantii jako specjalista do spraw reklamy. Jego poprzednik na tym stanowisku był człowiekiem bardzo skrupulatnym i pracowitym. Pozostawił po sobie różne notatki, które okazały się bardzo przydatne. Jedno z zestawień zawierało informacje, o ile wzrastała sprzedaż mebli po każdym ogłoszeniu, które ukazywało się w jednej z gazet: *Wieczorne Powszechnym*, *Słowie Trabantii* i *Gońcu Trabantkim*. Są to gazety najczęściej czytane przez Trabantian, dlatego poprzednik pana Bussego tylko w nich zamieszczał ogłoszenia. Ceny ogłoszeń zależą od ich wielkości i są we wszystkich wymienionych gazetach jednakowe. Opłata za standardowy moduł reklamowy (w ramce) wynosi 100 zł, za moduł podwójny – 200 zł, za ogłoszenie o trzykrotnie większej powierzchni – 300 zł itd. Nie ma możliwości pośrednich.

A oto tabelka sporządzona przez poprzednika pana Bussego. Przedstawia ona wzrost wpływów ze sprzedaży mebli (w tys. zł) po każdym ogłoszeniu prasowym.

Cena ogłoszenia	00	200	300	400	500	600	700	800
<i>Wieczór Powszechny</i>	5	11	17	17	17	20	22	23
<i>Słowo Trabantii</i>	4	8	12	16	20	24	27	28
<i>Gońiec Trabantki</i>	3	9	15	15	15	17	18	20

Na przykład na przecięciu wiersza *Słowo Trabantii* i kolumny 500 jest liczba 20. Oznacza to, że po umieszczeniu w *Słowie Trabantii* ogłoszenia za 500 zł sprzedano meble za kwotę o 20 000 zł większą od dotychczasowej przeciętnej. Z notatek wynikało też, że brak reklamy w prasie powodował zerowy przyrost sprzedaży – utrzymywała się wtedy na dość niskim i stałym poziomie, natomiast wykupienie ogłoszenia droższego niż 800 zł nie powodowało już żadnego dodatkowego wzrostu sprzedaży.

Właściciel salonu meblowego przeznaczył w tym miesiącu 800 zł na zainwestowanie w reklamę. Pan Busse będzie musiał podjąć swoją pierwszą ważną decyzję – w jaki sposób rozdzielić powyższą kwotę między trzy gazety, aby osiągnąć możliwie najwyższe wpływy ze sprzedaży. Chciałby, aby jego umiejętność podejmowania optymalnych decyzji zrobiła wrażenie na szefach. Jak powinien postąpić?

Rozwiązanie

Na początek wprowadzimy wygodne oznaczenia. Niech $W(x)$, $S(x)$ i $G(x)$ oznaczają kwoty, o jakie wzrosła sprzedaż mebli w wyniku ukazania się ogłoszenia za x zł na łamach poszczególnych gazet (kolejno *Wieczoru Powszechnego*, *Słowa Trabantii* i *Gońca Trabantkiego*). Z tabelki wynika np., że $S(600) = 24\ 000$. Zadanie rozwiążemy za pomocą procedury opisanej w kilku krokach.

Krok 1

Przypuśćmy, że możliwe jest zamieszczenie reklamy tylko w *Wieczorze Powszechnym*. Jaka decyzja byłaby w tej sytuacji najkorzystniejsza? Ponieważ

$W(100) = 5\ 000$,	$W(300) = 17\ 000$,	$W(500) = 17\ 000$,	$W(700) = 22\ 000$,
$W(200) = 11\ 000$,	$W(400) = 17\ 000$,	$W(600) = 20\ 000$,	$W(800) = 23\ 000$,

widzimy, że najkorzystniejsza decyzja to zamieszczenie ogłoszenia za 800 zł.

Krok 2

Przypuśćmy, że zamieszczenie ogłoszenia możliwe jest w dwóch gazetach: *Wieczorze Powszechnym* i *Słowie Trabantii*. Jak zainwestować teraz 800 zł? Jak najlepiej podzielić je między te gazety? Jest 9 możliwych wariantów podziału, które dają następujące wzrosty wpływów ze sprzedaży:

$W(0) + S(800) = 0 + 28\ 000 = 28\ 000$,	$W(500) + S(300) = 17\ 000 + 12\ 000 = 29\ 000$,
$W(100) + S(700) = 5\ 000 + 27\ 000 = 32\ 000$,	$W(600) + S(200) = 20\ 000 + 8\ 000 = 28\ 000$,
$W(200) + S(600) = 11\ 000 + 24\ 000 = 35\ 000$,	$W(700) + S(100) = 22\ 000 + 4\ 000 = 26\ 000$,
$W(300) + S(500) = 17\ 000 + 20\ 000 = 37\ 000$,	$W(800) + S(0) = 23\ 000 + 0 = 23\ 000$,
$W(400) + S(400) = 17\ 000 + 16\ 000 = 33\ 000$,	

Porównując wyniki, widzimy, że największy wzrost wpływów ze sprzedaży gwarantuje zamieszczenie w *Wieczorze Powszechnym* ogłoszenia za 300 zł, a w *Słowie Trabantii* za 500 zł. Osiągniemy wtedy przyrost wpływów 37 000 zł.

Krok 3

Spróbujemy teraz znaleźć najkorzystniejszy podział środków między wyżej wymienione dwie gazety przy zmniejszających się nakładach na reklamę.

Sztafeta pokoleń

... w koszyczku jabłuszko...

W koszu były trzy jabłka. Rozdałem je moim trzem siostram tak, że jedno zostało w koszu. Jak to możliwe?

Jak podzielić trzy jabłka pomiędzy dwóch ojców i dwóch synów nie krojąc tych jabłek?

Ile jabłek miałem w koszyku, jeśli połowę jego zawartości i jedno jabłko dałem siostrze, połowę reszty i jeszcze jedno jabłko dałem bratu, a potem połowę tego, co zostało, zjadłem i w koszyku mam teraz 3 jabłka?

Na spacer poszedł brat z siostrą i mężem z żoną. Znaleźli cztery jabłka pod jabłonią. Wzięli po jednym i jedno zostało. Jak to się stało?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

a) Mamy do dyspozycji 700 zł. Możliwe jest 8 wariantów ich podziału:

$$\begin{array}{ll} W(0) + S(700) = 0 + 27\,000 = 27\,000, & W(400) + S(300) = 17\,000 + 12\,000 = 29\,000, \\ W(100) + S(600) = 5\,000 + 24\,000 = 29\,000, & W(500) + S(200) = 17\,000 + 8\,000 = 25\,000, \\ W(200) + S(500) = 11\,000 + 20\,000 = 31\,000, & W(600) + S(100) = 20\,000 + 4\,000 = 24\,000, \\ W(300) + S(400) = 17\,000 + 16\,000 = 33\,000, & W(700) + S(0) = 22\,000 + 0 = 22\,000. \end{array}$$

W tym przypadku należy przeznaczyć 300 zł na ogłoszenie w *Wieczorze Powszechnym* i 400 zł na ogłoszenie w *Słowie Trabantii*. Przyrost wpływów ze sprzedaży osiągnie wtedy 33 000 zł.

b) Mamy do dyspozycji 600 zł. Możliwych jest 7 wariantów podziału:

$$\begin{array}{ll} W(0) + S(600) = 0 + 24\,000 = 24\,000, & W(400) + S(200) = 17\,000 + 8\,000 = 25\,000, \\ W(100) + S(500) = 5\,000 + 20\,000 = 25\,000, & W(500) + S(100) = 17\,000 + 4\,000 = 21\,000, \\ W(200) + S(400) = 11\,000 + 16\,000 = 27\,000, & W(600) + S(0) = 20\,000 + 0 = 20\,000, \\ W(300) + S(300) = 17\,000 + 12\,000 = 29\,000, & \end{array}$$

W tym przypadku należy przeznaczyć po 300 zł na ogłoszenia w obu gazetach, osiągając przyrost wpływów ze sprzedaży 29 000 zł.

Analogicznie rozpatrujemy:

c) 6 wariantów dla kwoty 500 zł i otrzymujemy optymalny wynik

$$W(300) + S(200) = 17\,000 + 8\,000 = 25\,000,$$

d) 5 wariantów dla kwoty 400 zł dają

$$W(300) + S(100) = 17\,000 + 4\,000 = 21\,000,$$

e) 4 warianty dla kwoty 300 zł dają

$$W(300) + S(0) = 17\,000,$$

f) 3 warianty dla kwoty 200 zł dają

$$W(200) + S(0) = 11\,000,$$

g) 2 warianty dla kwoty 100 zł dają

$$W(100) + S(0) = 5\,000.$$

Znamy już optymalne kombinacje podziału pieniędzy na reklamę między dwie gazety przy różnych kwotach nakładów.

Krok 4

Rozpatrzmy teraz możliwe kombinacje podziału środków między trzy gazety. Do dyspozycji mamy 800 zł. Jeśli jakąś kwotę przeznaczymy na reklamę w *Gońcu Trabackim*, to resztę dzielimy między pozostałe gazety w sposób najkorzystniejszy (zgodnie z krokiem 3). Niech $WS(x)$ oznacza efekt najkorzystniejszego podziału x zł między *Wieczór Powszechny* i *Słowo Trabantii*. Wszystkie przypadki możemy zapisać następująco:

$$\begin{array}{ll} G(0) + WS(800) = G(0) + W(300) + S(500) = 0 + 37\,000 = 37\,000 \\ G(100) + WS(700) = G(100) + W(300) + S(400) = 5\,000 + 33\,000 = 38\,000 \\ G(200) + WS(600) = G(200) + W(300) + S(300) = 11\,000 + 29\,000 = 40\,000 \\ G(300) + WS(500) = G(300) + W(300) + S(200) = 17\,000 + 25\,000 = 42\,000 \\ G(400) + WS(400) = G(400) + W(300) + S(100) = 21\,000 + 21\,000 = 42\,000 \\ G(500) + WS(300) = G(500) + W(300) + S(0) = 25\,000 + 17\,000 = 42\,000 \\ G(600) + WS(200) = G(600) + W(200) + S(0) = 27\,000 + 16\,000 = 43\,000 \\ G(700) + WS(100) = G(700) + W(100) + S(0) = 29\,000 + 15\,000 = 44\,000 \\ G(800) + WS(0) = 33\,000 + 0 = 33\,000 \end{array}$$

Jak widać, maksymalny przyrost kwoty uzyskanej ze sprzedaży mebli nastąpi wówczas, gdy po 300 zł zostanie zainwestowane w reklamę w *Gońcu Trabackim* i *Wieczorze Powszechnym*, a 200 zł w *Słowie Trabantii*. Taki rozdział środków na reklamę zapewni wzrost kwoty sprzedaży o 40 000 zł, a panu Bussemu zapewni przychylną szefów firmy.

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

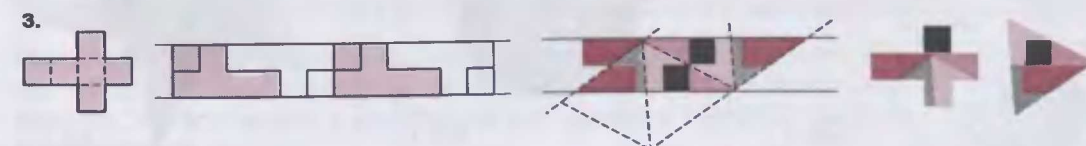
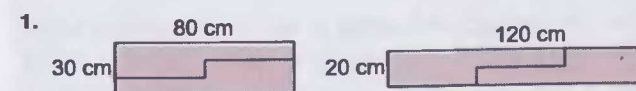
Na kurzej fermie wuja McDonalda bioenergotechnolodzy z Instytutu Jajo Kolumba przeprowadzili badania nad wpływem nowych gatunków pasz na nośność kur. Okazało się, że wprowadzenie do tony karmy domieszki ziarna kukurydzy argentyńskiej, chilijskiej lub peruwiańskiej ma istotny wpływ na liczbę znoszonych jaj. Tabela przedstawia wzrost liczby znoszonych jaj na fermie jajek w zależności od ilości dosypywanego ziarna każdego rodzaju.

wzrost liczby jaj po dodaniu kukurydzy [worków/tonę]		2	3	4	5	6
argentyńska	80	150	200	250	280	290
chilijska	100	120	130	140	150	160
peruwiańska	200	220	220	230	230	230

Dalsze zwiększanie procentowej zawartości kukurydzy w karmie powoduje u ptaków kurzą ślepotę. Kukurydza każdego rodzaju sprzedawana jest w workach 10 kg w cenie 10 zł za kg. Wuj McDonald otrzymał właśnie kredyt bankowy w wysokości 1000 zł, który chce przeznaczyć na zakup kukurydzianych dodatków do karmy. Ile którego ziarna powinien kupić?

Eugeniusz Sikorski

Odpowiedzi do zadań z artykułu Geometria nożyczek



np. 8 : 5 = 1,6. Defle to wykazywają, że ilość jaj o 800 sztuk i 8 worków kukurydzy (argentyńskiej i chilijskiej) krótkość w oporunku 2 : 3. Odpowiedź: Nielepiej zabrać po 5 worków kukurydzy peruwiańskiej.

Prima aprilis, prima aprilis,

$$\begin{aligned} 16 - 36 &= 25 - 45 \\ 16 - 36 + \frac{81}{4} &= 25 - 45 + \frac{81}{4} \\ \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\ 4 - \frac{9}{2} &= 5 - \frac{9}{2} \\ 4 &= 5 \end{aligned}$$

czytaj powoli, bo się pomylisz

Gwiazdy z gwiazd dwunastu (1)

W dotychczasowej wędrówce po krainie wielościanów poznaliśmy m.in. wszystkie 5 wypukłych wielościanów foremnych i kilkakrotnie spotkaliśmy się z postacią Johanneśa Keplera. Wielościany przedstawione w tym numerze również związane są z jego osobą – Kepler był pierwszym, który opisał ich matematyczne własności.

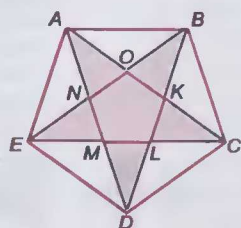
Zacznijmy od pewnego uogólnienia. W tradycyjnej definicji wielokąta żąda się, by jego brzegiem była łamana zamknięta zwyczajna, czyli taka, której koniec pokrywa się z początkiem i która nie przecina samej siebie. Jeśli odrzucimy ten drugi warunek powstaną figury, których brzeg jest wyznaczony przez łamaną przecinającą się ze sobą. Nazywamy je wielokątami gwiaździstymi.

Pentagram jest popularnym elementem zdobniczym. W starożytnej Grecji był emblematem pitagorejczyków, uważano go za symbol zdrowia, noszono w postaci medalika lub umieszczano na monetach. W średniowieczu ryto go na amuletach i używano do odczyniania czarów. Dziś wiele państw ma go na swojej fladze.

Dlaczego o siedzibie dowództwa armii USA mówi się Pentagon?

Rozważmy pięciokąt foremny $ABCDE$ i narysujmy jego wszystkie przekątne. Tworzą one łamaną zamkniętą $ACEBDA$ (rys. 1), którą możemy uważać za brzeg pięciokąta gwiaździstego. Składa się on z pięciu przystających odcinków, a kąty przy każdym z wierzchołków są równe (punkty, w których brzeg przecina sam siebie, tzn. K, L, M, N, O , nie są wierzchołkami tego wielokąta; za wierzchołki uważamy jedynie wierzchołki łamanej, czyli punkty A, C, E, B, D). Możemy zatem uznać, że jest to gwiaździsty pięciokąt foremny. Nazywany jest on często pentagramem, dla odróżnienia od „zwykłego” pięciokąta foremnego (zwanego też pentagonem). Pentagram można otrzymać z pentagonu także przez przedłużanie krawędzi aż do przecięcia się tych boków, które dotychczas były rozłączne (przy takim rozumieniu pentagram z rys. 1 powstał poprzez przedłużanie boków pentagonu $KLMNO$).

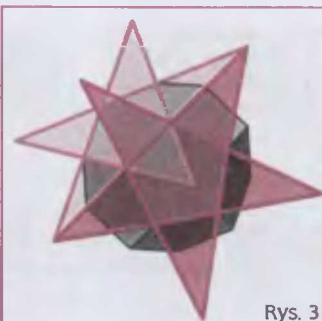
Spójrzmy teraz na dwunastościan foremny (o którym pisaliśmy w MMM nr 3/2003). Jego ściany są foremnymi pięciokątami. Bierzemy jedną z nich i przedłużamy jej krawędzie tak, aby otrzymać pentagram (rys. 2). Później robimy to z kolejną ścianą (rys. 3). Po zastosowaniu tej operacji



Rys. 1



Rys. 2

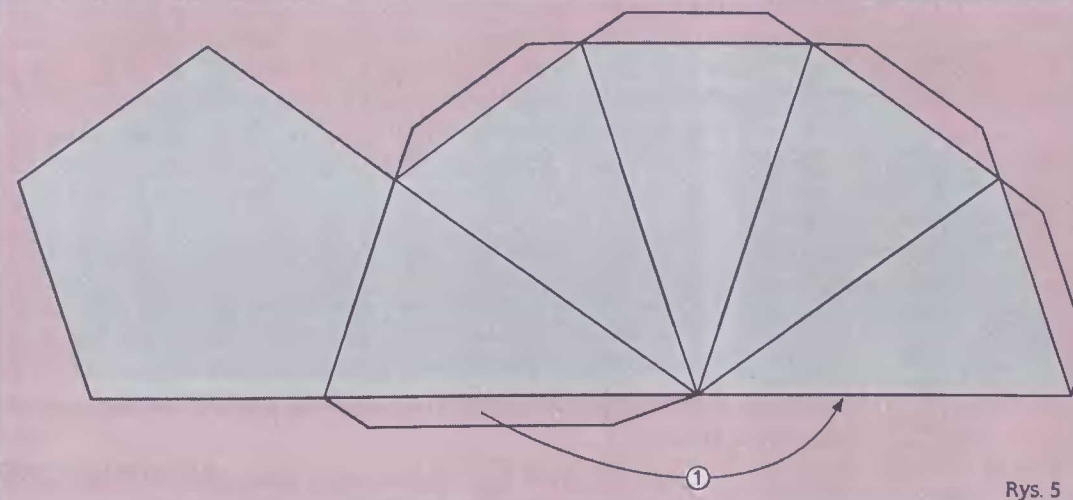


Rys. 3

do wszystkich 12 ścian otrzymamy bryłkę przedstawioną na rys. 4. Można uważać, że jest ona złożona z pewnej (jakiej?) liczby trójkątów równoramiennych, ale jeżeli pomyślimy o sposobie jej konstrukcji, to możemy uznać, że ma ona 12 wzajemnie przenikających się ścian, z których każda jest pentagramem. Zatem wszystkie ściany otrzymanej bryły są wielokątami foremnymi (gwiaździstymi) i w każdym wierzchołku spotyka się jednakowa ich liczba (5). Są to cechy analogiczne do własności wielościanów platońskich. Możemy zatem uznać, że mamy do czynienia z jeszcze jednym wielościanem foremnym. W odróżnieniu od brył platońskich jest on niewypukły.

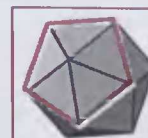
Matematyczne własności tej bryły pierwszy opisał Johannes Kepler na początku XVII wieku, jednak samą bryłę znano już wcześniej. Najstarsze jej przedstawienie można do dziś podziwiać w postaci mozaiki na posadzce bazyliki św. Marka w Wenecji (patrz okładka). Pochodzi ona z początku XV wieku, a jej prawdopodobnym autorem jest Paolo Uccello – wybitna postać włoskiego renesansu. W połowie XIX wieku Arthur Cayley nadał temu wielościanowi obowiązującą do dziś nazwę – **dwunastościan gwiaździsty mały**.

Wykonanie modelu opisanego wielościanu nie jest trudne. Wystarczy skleić ze sobą (w sposób opisany we wcześniejszych numerach) 12 pięciokątnych piramidek, tak aby ich podstawy utworzyły 12-ścian foremny. Siatkę pojedynczej piramidki przedstawia rys. 5. Podstawą jest pięciokąt foremny, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi, których kąty przy podstawie mają 72° (to trójkąty podobne do trójkąta ENM z rys. 1). Stosunek długości ramienia do podstawy w tych trójkątach jest liczbą złotą $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Uzasadnienie tego faktu pozostawiamy Czytelnikom.

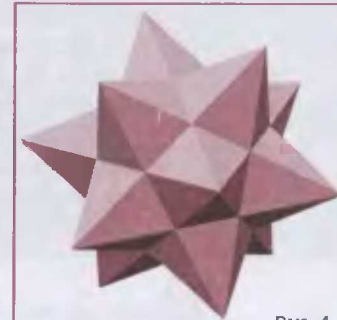


Rys. 5

Podobną gwiazdkę, również po raz pierwszy opisaną przez Keplera, otrzymamy wychodząc od 20-ścianu foremnego. Wprawdzie jego ściany są trójkątami równobocznymi, ale pod każdym z wierzchołków leży utworzony z krawędzi pięciokąt foremny (rys. 6)



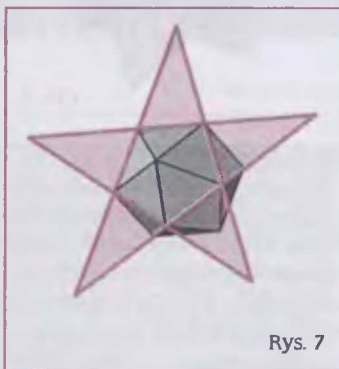
Rys. 6



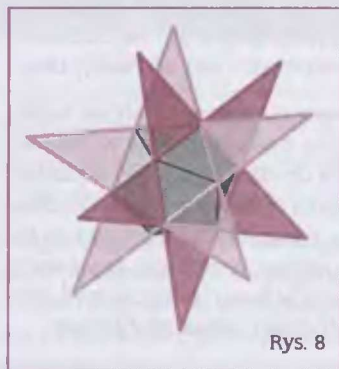
Rys. 4

W pentagramie stosunek właściwie wszystkich odcinków jest taki sam i jest równy liczbie złotej. W oznaczeniach z rys. 1 mamy: $\frac{AC}{OC} = \frac{OC}{AO} = \frac{AO}{OK}$. Ta proporcja w starożytności uznana została za kanon piękna, np. rzeźby Fidiasza wykonane są w ten sposób, że talia dzieli sylwetkę, a kolano nogę w stosunku złotym.

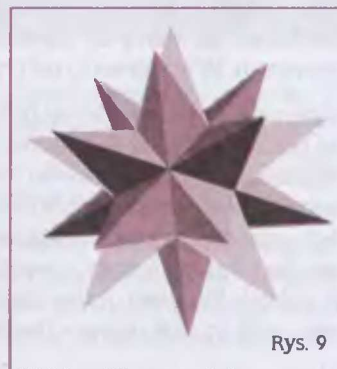
Dla 12 wierzchołków 20-ścianu wykonujemy operację przedstawioną na rys. 7, rys. 8 przedstawia kolejny etap powstawania gwiazdki a ostateczny efekt przedstawia rys. 9. „Oficjalna” nazwa tej bryły (również zaproponowana przez Arthura Cayley’a) to **dwunastościan gwiaździsty wielki**. Podobnie jak poprzedni ma on 12 ścian będących pentagramami, ale tym razem są one inaczej zorganizowane – w każdym z (ilu?) wierzchołków schodzą się 3. Jest to kolejny przykład niewypukłego wielościanu foremego.



Rys. 7



Rys. 8

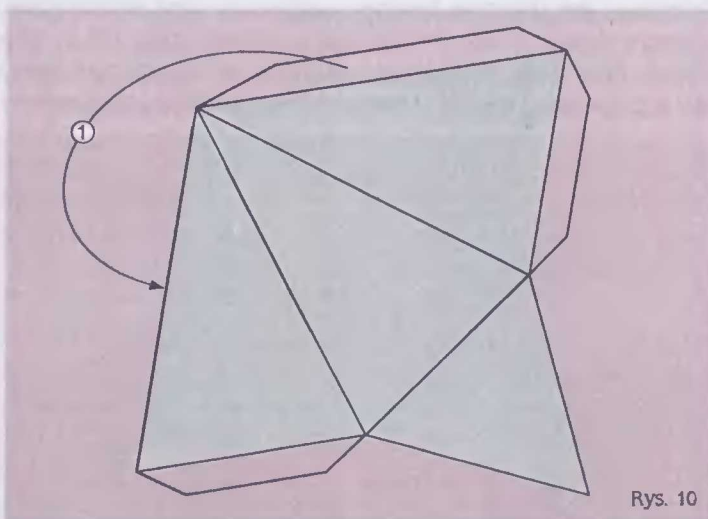


Rys. 9

Wykonanie modelu wymaga sklejenia 20 ostrosłupów trójkątnych, których siatkę przedstawia rys. 10. Podstawą jest trójkąt równoboczny, a ściany boczne są podobne do trójkątów z rys. 1.

Zadania dla Czytelników

1. Czy gwiazda sześcioramienna jest wielokątem gwiaździstym?
2. Ile jest foremnych 7-kątów gwiaździstych? Ile jest takich 8-kątów?
3. Ile krawędzi mają opisane w tekście gwiazdki?
4. Co jest uwypukleniem (patrz MMM nr 4/2003) każdej z nich?
5. Na czym polega zasadnicza różnica w konstrukcji opisanych gwiazdek?



Rys. 10

Użycie siatek ostrosłupów o krawędziach podstawy długości 3 cm daje gwiazdki o średnicy ok. 15 cm.

Piotr Pawlikowski

Odpowiedzi do zadań z artykułu MiNi-konkurs

1. NNTN, 2. TNTT, 3. TTNN, 4. TTTT, 5. NTNN, 6. TNNN, 7. TNNN, 8. TNNT, 9. NNNT, 10. NNTN.

Z notatnika starego belfra

Przepraszam, czy tu biją?

Dobry nauczyciel **panuje** nad klasą zarówno w czasie demonstracji nowego materiału przy tablicy, jak i podczas ćwiczeń wykonywanych przez uczniów we własnych zeszytach. Wykorzystując inteligencję i ciekawość świata młodych ludzi, winien on **skutecznie przeważać** nad nimi swoją wiedzą, dydaktycznym profesjonalizmem oraz odrobiną osobistej **charyzmy**, która nadaje zajęciom osobliwą atmosferę. Krótko mówiąc, dobry nauczyciel musi intelektualnie, kulturalnie lub jeszcze inaczej **sterroryzować** klasę. Alternatywą bowiem jest sterroryzowanie nauczyciela przez klasę.

Tuż po wojnie jako uczeń gimnazjum w Ząbkowicach Śląskich miałem cudowną polonistkę, istotę maleńką, siadającą w czasie zajęć na pulpicie pierwszej ławki i merdającą nogami w czasie najwspanialszych, jakie w życiu słyszałem, wykładów z literatury ojczystej, walącą po łbach dokuczliwych, a siedzących w zasięgu jej wypielęgowanych rączek, przerosniętych uczniów (często byłych, a nawet aktualnych, partyzantów). Ona która **terroryzowała** nas **autentycznie** swoją dziecinną naiwnością, i żaden by się nie odważył jej skrzywdzić (choć w swojej naiwności nigdy by tego nie zrozumiała jako urazy, ale klasa nie darowała by takiemu łobuzowi).

Inaczej terroryzował studentów mój wykładowca astronomii, prof. Antoni Opolski. Nie rozwijał swych (niewątpliwych) wdzięków osobistych, tylko od momentu punktualnego wejścia na salę, gdzie czekało czasem kilkuset studentów, zaczynał mówić spokojnie przez 45 minut lub nawet półtorej godziny, a wszyscy słuchali jak zauroczeni. Sam po pewnym czasie zaczynałem odczuwać ból głowy z wrażeń, jakie wywoływał ten wykład. Z ogromu wiedzy autora, rozmiarów wszechświata i mistrzostwa w demonstrowaniu jednego i drugiego.

Oto przykłady, jak tych dwoje wspaniałych, a tak różnych przecież nauczycieli „terroryzowało” swoich słuchaczy, automatycznie neutralizując wszelkie myśli o dokuczliwym zachowaniu audytorium. Wszystko zależy zatem od nauczyciela. On powinien bardzo lubić swoje nauczanie i szanować swój przedmiot oraz szanować, ale nie lękać się, audytorium, niezależnie od jego liczebności ani jakości.

To są ważne kryteria, jakie uczniowie powinni brać pod uwagę ferując opinie i próbując sprawiedliwie ocenić swoich nauczycieli. Bo oceniać już można! A bić **nikogo nie wolno!** Nigdy! Nawet kiedy zasługuje...

Antoni Dindorf

Wylowione z sieci (5)

Warsztat otwarty

<http://snm.org.pl/wotwarty/galpawlik>

Pod tym adresem można znaleźć galerię kilkudziesięciu zdjęć wielościanów wykonanych przez autora stałej rubryki w „MMM”, Piotra Pawlikowskiego (którego kolekcja wielościanów jest drugą co do wielkości w Polsce). Zdjęcia przedstawiają między innymi modele wszystkich 53 niewypukłych wielościanów jednorodnych.

cd. s. [10π + π]

Forum Czytelników

<http://www.mmm.lg.pl>

Zadania nie do rozwiązania

Na stronie internetowej MMM funkcjonuje dział „Zadania (nie?) do rozwiązania”, w którym umieszczamy zadania przysłane przez Czytelników, jeśli rozwiązania ani autorowi, ani redakcji nie są znane w ogóle lub nie jesteśmy z nich zadowoleni (są długie, żmudne, nieelementarne, komputerowe itp.) albo gdy zadania wydają nam się zbyt trudne, aby umieścić je w czasopiśmie. Zachęcamy jednak wszystkich, aby spróbowali się z nimi zmierzyć oraz nadsyłali własne propozycje.

W rubryce tej pojawiło się zadanie „Kłopotliwy wzór” postawione podczas emisji telewizyjnego maratonu matematycznego przez Japończyka Nob Yoshigaharę, a nadesłane przez p. Rościława Rabczuka:

Litery zastąpić dziewięcioma cyframi, każdej można użyć tylko jeden raz, tak aby prawdziwy był wzór:

$$\frac{A}{BC} + \frac{D}{EF} + \frac{G}{HI} = 1$$

(mianownik należy interpretować jako liczbę dwucyfrową).

Jedynym rozwiązaniem (z dokładnością do permutacji składników) jest

$$\frac{5}{34} + \frac{7}{68} + \frac{9}{12} = 1.$$

Rozwiązanie przesłał Maciej, który otrzymuje od nas nagrodę książkową. Prosimy go o kontakt z redakcją. Pozostaje jednak pytanie, jak uzyskać to rozwiązanie bez użycia komputera.

O piśmie

Młodzież ze szkoły polskiej przy Ambasadzie Polskiej w Moskwie wyraziła ogromne zainteresowanie zadaniami z pisma „MMM”. T. Rosiak

Z zadowoleniem stwierdzam, że kwartalnik „MMM” staje się coraz ciekawszy. Życzę Redakcji wielu nowych Czytelników, interesujących artykułów i zadań. R. Rudnicki

Razem z przyjaciółmi mamy znakomitą zabawę przy rozwiązywaniu zadań z „MMM”. Dzisiaj jest 29 lutego, który jest raz na cztery lata, dlatego piszę właśnie dziś. Pozdrowienia. Miłośniczka matematyki – Aleksandra D.

Gratuluję pomysłu na taki kwartalnik. Robicie super sprawę. Tak trzymać. Zawartość w pełni mnie satysfakcjonuje. Arek K. z Gdańska

Odnoszę wrażenie, że nowy (6) numer „MMM” różni się od poprzednich. Reklama, recenzja w „Delcie”, konkurs zadaniowy w nowej formule, konkurs noworoczny. Pismo nabiera wiatru w żagle. Oby tak dalej. Piotr P.

Cieszę się, że zmienili Państwo reguły gry! Wygrałam bowiem 100 zł za rozwiązanie zadań konkursowych i nie chciałam wysłać następnych rozwiązań, by innym nie blokować radości wygrania czegoś. A teraz będę zbierała punkty na tytuł! Sabina J-M.

Dostałem dzisiaj nagrodę za wyraz symetryczny. Głupio się trochę czuję, jako zwycięzca, bo wyraz Oli – AUTOTOMIA jest o niebo lepszy (mimo że o jedną literkę krótszy) od mojego. Piotr

Zadania konkursowe

Przypominamy, że od początku roku zmieniliśmy regulamin konkursu zadaniowego. Nowe zasady wzorowaliśmy na konkursie „Rozkosze Łamania Głowy” prowadzonym w latach 1970–1981 na łamach „Życia Warszawy” (czyt. MMM nr 1/2004). Dotychczasowe wyniki konkursu są już dostępne na naszej stronie internetowej.

Na rozwiązania zadań z bieżącego numeru czekamy do 30 czerwca 2004 r. Wśród uczestników konkursu rozlosujemy nagrody pieniężne. Kupon konkursowy zamieszczamy na ostatniej stronie.

Do loży Ekspertów Łamania Głowy dołączyli:

Jakub PURSKI, Rawa Mazowiecka (37);

Magdalena MICHALAK, Jelenia Góra (36);

Mateusz LEWARTOWSKI, Dębica (35);

Ryszard RUDNICKI, Włocławek (34).

Gratulujemy!

1. Układanka z zapalek

Z jakiej najmniejszej liczby zapalek można ułożyć 4 trójkąty równoboczne? Zapalek nie wolno łamać.

3. Kalendarzowe sumy

14 maja 2003 roku był takim dniem, kiedy sumy cyfr numerów dnia, miesiąca i roku były równe. Ile takich dat było od początku ubiegłego wieku do dzisiaj?

4. Przyjacielski zakład

„Założę się o złotówkę – powiedział Piotr – że jeśli dasz mi dwa złote, to oddam Ci trzy”.

„Zrobione” – odpowiedział Paweł.

Czy Piotr dobrze na tym wyszedł?

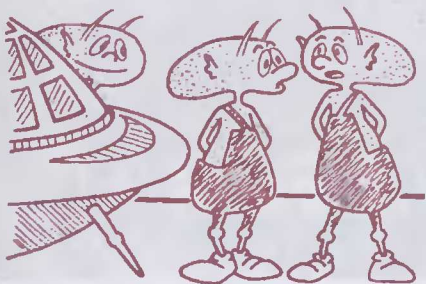
Skrót regulaminu konkursu

♦ W każdym numerze ogłaszanych jest 15 zadań (są to m.in. łamigłówki, zagadki lateralne, rebusy oraz zadania związane z publikowanymi w danym numerze artykułami).

♦ Uczestnik konkursu otrzymuje tyle punktów, ile wynosi liczba zaliczonych zadań.

♦ Po uzbieraniu 33 punktów uzyskuje się tytuł *Eksperta Łamania Głowy*, co zostaje ogłoszone na łamach MMM. Po trzykrotnym zdobyciu tego tytułu zostaje się *Mistrzem Łamania Głowy*, co potwierdzone jest dyplomem. Trzykrotne zdobycie tytułu *Mistrza* skutkuje przyznaniem tytułu *Arcymistrza Łamania Głowy* i specjalnej odznaki.

♦ Do puli konkursowej wliczane są wszystkie punkty zdobyte od początku ukazywania się MMM.



5. Inwazja z kosmosu

Na bezludziu wylądowało UFO i wysiadła z niego pewna liczba ufoludek. Wiadomo, że: jest więcej niż jeden ufoludek, każdy ufoludek ma co najmniej dwie ręce i co najmniej jeden palec u każdej ręki, wszystkie ufoludki mają po tyle samo palców, łączna liczba palców na bezludziu jest zawarta między 200 a 300. Gdybyśmy wiedzieli, ile jest w sumie palców, to wiedzielibyśmy również, ile jest ufoludek. Ile ich jest?

2. Tajemnicza substancja?

Sama nie waży nic, ale kiedy jest w beczce, beczka waży mniej, niż gdyby tego nie było. Co jest w beczce?

6. Podział naleśników

Mama upiekła trzy okrągłe naleśniki i nakłuła ich środki. Zauważyła, że średnice naleśników mogłyby utworzyć trójkąt prostokątny. Za pomocą samego noża podzieli naleśniki między czworo dzieci, tak aby wszystkie dostały po równo i żeby naleśniki nie rozpadły się na więcej niż 5 części.

7. Lata lecą

Jan ma 36 lat. Ile lat ma Paweł, jeśli Jan ma dwa razy tyle, ile Paweł miał wtedy, kiedy Jan miał tyle, ile Paweł ma teraz?

8. Podwójna nierówność

Czy to prawda, że $3 < \sqrt{3+3\sqrt{3+3\sqrt{3+3\sqrt{3}}}} < 4$?

9. Nierówność z wykładnikami

Czy prawdziwa jest nierówność:

$$2002^{2002} + 2003^{2003} < 2004^{2004}?$$

10. Podział dywanu

W prezencie ślubnym Jola i Marek dostali piękny kwadratowy dywan, jednak do pokoju bardziej pasuje im prostokątny, o stosunku boków 9 : 16. Czy mogą tak pociąć dywan na części, aby po ich zszyciu miał on pożądaną kształt?

11. Co za typ

W pewnym czworokącie przekątne są prostopadłe i równe. Co to za typ czworokąta?

Wyłowione z sieci (6)

Galeria wielościanów

<http://www.polyedergarten.de>

Jest to galeria zawierająca zdjęcia stu kilkudziesięciu wielościanów wykonanych przez autora, Ulricha Mikloweita oraz prawie tyle samo wirtualnych modeli wykonanych w technice VRML.

Matematyczna galeria

<http://gallery.wolfram.com>

Bardzo bogata galeria wielościanów, powierzchni i innych obiektów przestrzennych prezentująca możliwości programu Mathematica. Wszystkie figury można obracać i skalować.

Teoria wielościanów

<http://www.queenhill.demon.co.uk/polyhedra>

Na stronie Guya Irtchbaldy można znaleźć kilkanaście artykułów dotyczących teorii wielościanów, m.in. ich klasyfikacji, sposobów cieniowania ścian wielościanów, tak by oddać ich wygląd w rzucie na płaszczyznę i metod konstrukcji takich rzutów.

wyłowić Wojciech Głodek

12. Innowacja pedagogiczna

W szkole w Kłokoczykach zamiast tradycyjnych ocen wprowadzono system punktowy. Nauczyciel matematyki zadał uczniom zadanie. Na arkuszu kartonu 10 x 12 cm narysował co 1 cm linie równoległe do krawędzi. Wycinając w rogach arkusza cztery prostokąty i zaginając pozostałą część wzdłuż linii, uczniowie mieli zrobić jak największe prostopadłościenną pudełko (bez przykrywkę). Za każdy cm^3 jego objętości zyskiwali punkt, a za każdy niewykorzystany cm^2 powierzchni arkusza tracili punkt. W jaki sposób wykonać pudełko, za które można uzyskać najwięcej punktów?

13. Skomunikowanie

Mąż codziennie wraca z pracy metrem na podmiejską stację dokładnie o godzinie 17.00. Żona wyjeżdża po niego samochodem i zabiera go do domu. Pewnego dnia mąż przyjechał wcześniejszym pociągiem i był na stacji o godzinie 16.00. Pogoda była ładna, więc zaczął iść spacerem w kierunku domu trasą, którą jeździ żona. Spotkał ją po drodze i dalszą drogę odbyli samochodem, przyjeżdżając 10 minut wcześniej niż zwykle. Jeśli żona wyjechała o tej samej porze co zwykle, jak długo jej mąż szedł do chwili spotkania?

14. Naukowcy i ludożercy

Wyspa Mu-Torere liczy 300 mieszkańców, którzy zajmują się matematyką, fizyką lub są ludożercami. Połowa matematyków to ludożercy, połowa ludożerców to fizycy, a połowa fizyków to matematycy. Wiadomo, że żaden matematyk, który zajmuje się fizyką, nie jest ludożercą. Ilu matematyków mieszka na wyspie?

15. T jak tangram

Czy z podanych elementów można ułożyć literę T?



Konkurs noworoczny

W konkursie prowadzi na razie p. Ryszard Rudnicki, któremu zaliczyliśmy liczby od 1 do 86. Odpowiedzi nadal wpływają. Redakcja podejrzewa, że stosując odpowiednią liczbę silni i pierwiastków kwadratowych oraz operację [x] można uzyskać dowolną liczbę naturalną. Może komuś z Czytelników uda się tę hipotezę udowodnić. Zadanie to dołączamy do internetowej rubryki „Zadań (nie) do rozwiązania”.

Za pomysły zadań wykorzystanych w tym numerze dziękujemy:

Bernardowi Bazylewiczowi,

Larsowi Ebbensgaardowi,

Wojciechowi Głodekowi

Arturowi Malinie,

Ryszardowi Rudnickiemu,

Eugeniuszowi Sikorskiemu,

Piotrowi Świądrychowi,

i Mieczysławowi Trądowi.



Wyniki i odpowiedzi

Rozwiązania zadań konkursowych z numeru 4/2003

1. Podział kąta. 45° lub 90° .
2. Zielone rajtuzy. Nosiła je Natalia.
3. Podział boków. Trójkąt PSC jest równoboczny, a odcinek QS jest jedną z jego wysokości ($\angle AQS = 90^\circ$). Wtedy $\triangle AQS$ jest „połową” trójkąta równobocznego o boku AX i $AX = 2 \cdot AQ = 2 \cdot \frac{2}{3} AC = 4$.



4. Wielokąty w okręgu. Wybór 9 wierzchołków wyznacza jednoznacznie 3 odrzucone wierzchołki. Te punkty „rozbijają” dziewięcioelementowy zbiór wybranych wierzchołków na trzy podzbiory (niektóre mogą być puste – gdy niewybrane punkty są sąsiednimi wierzchołkami dwunastokąta). Zatem różnych dziewięciokątów jest tyle, ile różnych rozkładów liczby 9 na sumę trzech nieujemnych liczb całkowitych (nie uwzględniamy rozkładów różniących się kolejnością składników, bo dają wielokąty przystające). Mamy 12 rozkładów: $9 = 9 + 0 + 0 = 8 + 1 + 0 = 7 + 2 + 0 = 7 + 1 + 1 = 6 + 3 + 0 = 6 + 2 + 1 = 5 + 4 + 0 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$. Można więc uzyskać 12 nieprzystających dziewięciokątów.

5. Demonstracja. Jeśli było n demonstrantów otrzymalibyśmy graf o n wierzchołkach każdy rzędu 5. Ponieważ rząd grafu musi być parzysty, n jest parzyste i demonstrantów można ustawić w pary.

6. Zjazd matematyków. Pudełko nr 2.
7. Siatki sześciianu. Jest 11 różnych siatek (patrz rys.).



8. Szczęśliwe liczby. Trzynastą liczbą szczęśliwą jest 49. W pierwszej setce liczb naturalnych są 23 takie liczby.
9. Przydział na działkę. Działka powinna być kwadratem o boku $\sqrt{150} \text{ m} \approx 12,25 \text{ m}$.
10. Jesienna orka. Koń nie zostawił śladów kopyt, bo idzie przed pługiem.
11. Na kortach. Najniższy koszt ogrodzenia wynosi 23 040 zł (wymiary kortu wynoszą wtedy $70 \text{ m} \times 56 \text{ m}$).
12. Matematyczne podróże. Sytuację ilustruje graf o 2003 wierzchołkach i krawędziach w sześciu kolorach. Z każdego wierzchołka wychodzą co najmniej 334 jednokolorowe krawędzie (np. zielone). Na ich drugich końcach mamy 334 miasta. Jeśli choć jedna łącząca je krawędź jest zielona, to znajdziemy zielony trójkąt i zadanie będzie rozwiązane. Jeśli nie, to mamy do dyspozycji tylko 5 kolorów i z każdego z tych wierzchołków musi wychodzić co najmniej 67 jednokolorowych krawędzi (np. czerwonych). Na ich drugich końcach jest 66 miast. Jeśli choć jedna krawędź między nimi jest czerwona, to znajdziemy czerwony trójkąt. Kontynuując analogicznie to postępowanie uzasadnimy, że jednokolorowy trójkąt zawsze w tym grafie istnieje.

13. Pieski żywot. Pierwszy pies podróżował na wschód, zyskując dni życia, a drugi na zachód, tracąc je (jak w powieści J. Verne'a).

14. Sosy do sałatek. Jest 31 sposobów doprawienia sałatek 5 sosami (tylko jak to będzie smakowało?).

15. Parkietowanie szachownicy. Potrzeba do tego $49 (= 196 : 4)$ klocek. W dowolnym położeniu klocek może przykryć 1 pole białe i 3 czarne lub na odwrót (patrz rys.). Jeśli któregoś typu będzie więcej, to klocki pokryją więcej pól jednego koloru, a na szachownicy liczby pól białych i czarnych są równe. Klocków obu typów nie może być tyle samo, bo liczba klocków jest nieparzysta, zatem takie pokrycie jest niemożliwe.



Wyniki konkursu z numeru 4/2003

Nagrody pieniężne w konkursie Łamanie głowy, czyli burza w mózgu otrzymują (w nawiasie podajemy liczby zaliczonych zadań). Przypominamy, że wyniki konkursu dostępne są na naszej stronie <http://www.mmm.ig.pl>

200 zł – Marita ADAMSKA Łódź (13);

100 zł – Arkadiusz KRZEMIŃSKI Gdańsk (13), Agnieszka BOMERSBACH Wrocław (12), Agata KOMOROWSKA Szczecin (11), Piotr KUMOR Olsztyn (10), Tadeusz PROKOP Myszków (10);

50 zł – Jacek MIŁEK Włocławek (12), Karol MATUSZEWSKI Poznań (11), Natalia LIS Trzebnica (8), Antoni SZENDERA Katowice (8), Tomasz ŻOŁNOWSKI Płock (7), Marzena DARGACZ Gdańsk (6), Rafał JÓZEFOWICZ Olsztyn (6), Jakub OĆWIEJA Czechowice-Dziedzice (6), Dariusz CHUDZIA Wrocław (5), Anna KOŁODZIEJ Stąporków (5).

Kolejne tytuły *Eksperta Łamania Głowy* zdobyli:

Magdalena MICHALAK (37), Jakub PURSKI (36), Mateusz LEWARTOWSKI (35), Ryszard RUDNICKI (34). Gratulujemy i zachęcamy do zdobywania punktów na tytuł *Mistrza*.

Nagrody książkowe za rozwiązania *Zadań dla Czytelników* z numeru 4/2003 otrzymują: Piotr KUMOR z Olsztyna i Jarosław KRÓL z Żelechowa. Razem z odpowiedziami prosimy o podawanie wieku lub klasy, co pomoże nam wybierać właściwe książki.

Rozwiązania z numeru 1/2004

Zadania z Finału Międzynarodowych Mistrzostw w GmIL

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

Poranny dylemat – 8 sposobów. Matematyczna broszura – strona nr 14. Słodka etykieta – 20%. Wypzedaż – 40 euro. Liczbowa piramida – 1. Tajne hasło – są trzy rozwiązania: 4624, 6084, 8464. Zabawy na wodzie – 120 cm/s lub $20 \frac{5}{6}$ cm/s. Ogród ojca Izzydora – patrz rysunek. Kodowanie – 4999.



Rozwiązania zadań z konkursu Mathematics Without Limits

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

1. Jest $2^6 = 64$ różnych sposobów zajęcia miejsc w rzędzie (rzędów jest 62, więc dwa nie zostaną wykorzystane). Aby zmaksymalizować liczbę pasażerów, niewykorzystane muszą być te sposoby, w których jest ich w rzędzie najmniej, czyli gdy w rzędzie nie siedzi nikt oraz gdy siedzi tam tylko jeden pasażer. Wszystkie inne możliwości zostaną wykorzystane. Są one następujące: 1 układ – 6 pasażerów w rzędzie, 6 układów po 5 pasażerów w rzędzie (co daje 30 osób), 15 układów po 4 pasażerów w rzędzie (60 osób), 20 układów po 3 pasażerów (60 osób), 15 układów po 2 pasażerów (30 osób) i 5 (gdyż 1 został odrzucony) układów z 1 pasażerem. Razem daje to 191 osób.

2. Uczestnicy konferencji mogą pochodzić najwyżej z 5 różnych roczników. Z kraju o największej liczbie reprezentantów jest co najmniej 41 paleoantropologów (bo $281 = 6 \cdot 40 + 41$). Wśród tych osób będzie w najgorszym wypadku tylko dziewięć urodzonych w tym samym roku (bo $41 = 4 \cdot 8 + 9$), a w tej dziewięć w najgorszym wypadku będzie 5 osób jednej i 4 drugiej płci. Wynika z tego, że na konferencji na pewno musiało być pięć paleoantropologów tej samej płci, z tego samego kraju i w tym samym wieku. Jest to maksymalna taka liczba, ponieważ sytuacja taka, jak powyżej, mogła mieć miejsce.

3. Rozmieszczenie liter S, B, L i N nas nie interesuje. Zadanie sprowadza się do pytania, jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo przestawiając litery wyrazu CAAACA otrzymamy układ, w którym przed pierwszym C będą co najmniej dwa A. Mamy wstawić dwie litery C między cztery litery A. Jest 5 możliwości wstawienia pierwszej litery C i 6 możliwości wstawienia drugiej, ale możliwości liczymy teraz podwójnie (bo litery C są nierozróżnialne). Wszystkich jest zatem 15. Pozostaje sprawdzić, ile z nich spełnia warunek zadania. Wtedy żadna litera C nie może stać przed pierwszym ani przed drugim A. Są więc 3 sposoby wstawienia pierwszej litery C i 4 drugiej, znowu jednak liczymy je podwójnie. Układów spełniających warunek zadania jest 6, zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

4. Niech X będzie rzutem prostopadłym punktu I na prostą AC , a Y – jego rzutem na prostą AB . Odcinki IX oraz IY są równe (bo I jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów $\triangle ABC$). Ponieważ $IP = IQ$, to z twierdzenia Pitagorasa równe są też odcinki PX i QY . Zatem trójkąty PXI i QYI są przystające. Mogą zajść dwa przypadki: $\angle IQY = \angle IQA$, czyli $Y \in AQ$ albo $\angle IQY = \angle IQB$, czyli $Y \in BQ$. Ponieważ prowadzą do analogicznych sytuacji, rozważmy tylko pierwszy z nich. $P \notin CX$, bo gdyby tak było, mielibyśmy: $\angle ABC + \frac{1}{2} \angle BCA = \angle CQA = \angle IQY = \angle IPX = \angle BPA = \angle BCA + \frac{1}{2} \angle ABC$, czyli boki AB i AC musiałyby być równe. Wobec tego $P \in AX$, skąd $\angle IPX = \angle IPC$, tzn. $\angle ABC + \frac{1}{2} \angle BCA = \angle CQA = \angle IQY = \angle IPX = \angle BPC = 180^\circ - (\angle BCA + \frac{1}{2} \angle ABC)$, skąd $\angle ABC = \angle BCA = 120^\circ$ i otrzymujemy $\angle CAB = 60^\circ$.

5. Mamy obliczyć sumę $S = \sum_{i=1}^n i^2 x^{i-1}$. Zauważmy, że zachodzą równości:

$$\sum_{i=1}^n i^2 x^{i-1} = \sum_{i=1}^n (ix^i)' = \left(\sum_{i=1}^n (ix^i) \right)' = \left(x \sum_{i=1}^n (x^{i-1}) \right)' = \left(x \sum_{i=1}^n (x^i)' \right)' = \left(x \left(\sum_{i=1}^n x^i \right)' \right)' = \left(x \cdot \left(\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right)' \right)'$$

Obliczając te pochodne, otrzymamy zwartą postać wyniku. Można to zrobić również bez użycia pochodnych, grupując sumowane wyrazy w ciąg coraz dłuższych ciągów.

6. $[x + \frac{2}{3}] - [x]$ to 0 lub 1, a ponieważ $[x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}] = 3 \cdot 667 + 2$, musi być: $[x + \frac{2}{3}] = [x + \frac{1}{2}] = 668$ i $[x] = 667$, czyli spełniony musi być układ warunków: $668 \leq x + \frac{1}{2} < 669$, $668 \leq x + \frac{2}{3} < 669$ i $667 \leq x < 668$, co sprowadza się do $667,5 \leq x < 668$.

7. Dziedzina równania jest $(-1, 1)$, ponieważ $1 - x \geq 0$ oraz $1 - x^2 \geq 0$. Wobec tego istnieje takie $\alpha \in (0, \pi)$, że $x = \cos \alpha$. Równanie sprowadza się więc $(\sin \alpha \geq 0)$ do postaci: $\sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha$. Wykorzystując wzory na sinus i kosinus podwojonego argumentu, otrzymamy: $\sqrt{1 - \cos \alpha} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$. Ponieważ $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, a $\sin \frac{\alpha}{2}$ jest dla rozpatrywanych α nieujemny, mamy dalej: $\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$, co po zastosowaniu tożsamości $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)$ daje $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)$, skąd ($\alpha \in (0, \pi)$) otrzymujemy $\alpha = \frac{3\pi}{10}$.

8. Po oznaczeniu jednego z kątów ostrych danego trójkąta przez α mamy zbadać wartości wyrażenia $\frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \sin \alpha \cos \alpha$. Z własności funkcji trygonometrycznych możemy przekształcić tę funkcję do postaci $\frac{1}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$ różniczkowalną dla wszystkich $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Jej pochodna to $\frac{-\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{\sqrt{2} \sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)} + \cos 2\alpha$ i jej zera wyznacza równanie $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sqrt{2} \sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cos 2\alpha$. Są to 0, $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{4}$, co odpowiada trójkątom prostokątnym zdegenerowanym i równoramiennym. Nasze wyrażenie jest funkcją ciągłą, więc wystarczy obliczyć jego wartość dla tych kątów, co prowadzi do wniosku, że zadane wyrażenie przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})$.

9. Można utworzyć 9 numerów (1132, 1213, 1321, 2111, 2222, 2333, 3123, 3231, 3312). Więcej się nie da. Na pierwszej pozycji ta sama cyfra nie może wystąpić cztery razy. Gdyby tak było, to mielibyśmy cztery numery postaci $a***$, a wtedy drugie cyfry pewnych dwóch musiałyby być takie same.

10. Jeśli C jest dowolnym punktem na okręgu różnym od A i B , przez X oznaczmy środek odcinka BC , przez r promień, a przez O środek okręgu i przez α miarę kąta ABC , to $\angle BAH = \angle BAK - \angle HAK = \frac{\pi}{2} - \angle CAH = \angle ACH - \angle CAH = \angle BHA$ i $HB = AB = 2r$. $BK = \frac{2r}{\cos \alpha}$, więc $HK = BK - BH = 2r(\frac{1}{\cos \alpha} - 1)$. Okrąg jest wpisany w $\angle BMT$, więc $MT = BT$. Jeśli rzut prostopadły B na MT oznaczmy przez Y , to $BY \perp BK$ i $\angle TBY = \angle ABC$, więc $BT = \frac{BY}{\cos \alpha}$. $BY = XM = MO + OX = r + r \sin \alpha$, zatem $MT = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$. Dalej mamy $CH = CK - HK$ oraz $\angle CAK = \frac{\pi}{2} - \angle AKC = \angle ABC$, więc $CK = AC \tan \angle CAK = AC \tan \alpha = 2r \sin \alpha \tan \alpha$. Po podstawieniu wyliczonych wartości otrzymujemy $CH = 2r(\sin \alpha \tan \alpha - (\frac{1}{\cos \alpha} - 1))$, co po uwzględnieniu tożsamości trygonometrycznych daje $CH = 2r(1 - \cos \alpha)$.

Z twierdzenia Pitagorasa $HM^2 = HX^2 + MX^2$, przy czym $HX = BH - BX = r(2 - \cos \alpha)$, a $MX = r(1 + \sin \alpha)$. Po podstawieniu i skorzystaniu z „jedynki trygonometrycznej” otrzymamy $HM = r\sqrt{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}$. Z podobieństwa trójkątów HCS i HMB (czego można dowieść przez analizę kilku kątów wpisanych) $HS = HC \cdot \frac{HB}{HM}$. Ostatecznie

$$\begin{aligned} \frac{HK}{HS} &= \frac{HK \cdot HM}{HC \cdot HB} = \frac{2r(\frac{1}{\cos \alpha} - 1) \cdot r\sqrt{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}}{2r(1 - \cos \alpha)2r} = \frac{\frac{1}{\cos \alpha} - 1}{\sqrt{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}} = \frac{\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sqrt{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}} = \\ &= \frac{\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha - 4(1 - \cos \alpha)}{\sqrt{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}}} = \frac{\frac{r(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}}{r\sqrt{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha} - \frac{2r(1 - \cos \alpha) \cdot 2r}{r\sqrt{6 - 4 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}}} = \frac{MT}{HM - \frac{HC \cdot HB}{HM}} = \\ &= \frac{MT}{HM - HS} = \frac{MT}{MS}, \text{ co wraz z równością } \angle KHS \text{ i } \angle SMT \text{ (z równoległości } BK \text{ i } PT) \text{ oznacza podobieństwo trójkątów } KHS \text{ i } TMS, \text{ co z kolei pociąga równość } \angle HSK \text{ i } \angle MST, \text{ a to oznacza, że } S \text{ leży na } KT, \text{ co kończy dowód.} \end{aligned}$$

11. Oznaczmy środek okręgu przez O , kąt ABO przez α , a promień okręgu przez r . Niech $\overline{CD}$ będzie dowolną cięciwą zawierającą P . Wówczas, ponieważ $\overline{NP} \parallel \overline{BO}$, $\angle BPN = \alpha$, a z równoramienności trójkąta ABO również $\angle BAO = \alpha$, skąd analogicznie $\angle APM = \alpha$. Mamy więc

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{PA \cos \angle APM} + \frac{1}{PB \cos \angle BPN} = \frac{1}{PA \cos \alpha} + \frac{1}{PB \cos \alpha} = \frac{PB + PA}{\cos \alpha \cdot PA \cdot PB} = \frac{AB}{PA \cdot PB}.$$

Twierdzenie sinusów dla trójkąta ABO daje $\frac{AB}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{r}{\sin \alpha}$, skąd dzięki tożsamościom: $\sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\frac{AB}{\cos \alpha} = 2r$. Analizując kilka kątów wpisanych w dane koło, można zauważyć podobieństwo trójkątów ACP i DBP , co daje $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, czyli wartość zadane wyrażenia nie zależy od wyboru cięciwy zawierającej P .

opr. Dominika Pawlik, Lech Stawikowski

Zadania z artykułu Pierwszy gigant

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

1. Gdybyśmy utrzymywali zawrotne tempo pisanie 4 cyfr na sekundę, zajęłoby to ponad 1 500 000 s > 415 h, czyli ponad 17 dob. Zapisana cyframi o szerokości 2 mm liczba ta ciągnęłaby się ponad 3 km. Przyjmując wysokość pisanych cyfr 4 mm (cyfr jest 6 320 430), liczba ta zajęłaby ponad 6 320 430 : ((210 : 2)(296 : 4)) = 800 stron formatu A4.

2. $2^{ab} - 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{ab-1} = (1 + 2 + \dots + 2^{a-1})(1 + 2^a + 2^{2a} + \dots + 2^{a(b-1)})$.

3. Liczba ta ma dzielniki właściwe: 1, 2, 4, ..., 2^{p-1} (z pierwszego czynnika) i $2^p - 1$ (z drugiego) oraz ich iloczyny: $(2^p - 1) \cdot 2$, $(2^p - 1) \cdot 4$, ..., $(2^p - 1) \cdot 2^{p-2}$. Ich suma to $(2^p - 1) + (2^p - 1) + (2^p - 1) \cdot 2 + (2^p - 1) \cdot 4 + \dots + (2^p - 1) \cdot 2^{p-1} = (2^p - 1) \cdot (1 + 2^{p-1} - 1)$.

4. Zapiszmy parzystą liczbę doskonałą w postaci $2^{k-1} \cdot m$, gdzie m jest nieparzyste (wówczas $k > 2$). Suma wszystkich dzielników tej liczby to $s + 2s + 2^2 \cdot s + \dots + 2^{k-1} \cdot s$, gdzie s jest sumą dzielników liczby m (żaden z nich nie jest parzysty). Dalej jest to równe $(2^k - 1) \cdot s$ i z doskonałości wyjściowej liczby mamy $(2^k - 1) \cdot s = 22^{k-1} \cdot m$ (z dzielnikiem niewłaściwym). Zatem $2^k \cdot m$ musi dzielić się przez $2^k - 1$, czyli $2^k - 1$ dzieli m , więc m jest postaci $n \cdot (2^k - 1)$ dla pewnego n naturalnego. Po podstawieniu do $(2^k - 1) \cdot s = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot m$ i uproszczeniu otrzymujemy $s = 2^k \cdot n$. Ponieważ m i n są dzielnikami m , $s \geq m + n = n \cdot (2^k - 1) + n = 2^k \cdot n$, co w połączeniu z poprzednią równością daje $s = m + n$, czyli że m ma tylko dwa dzielniki, czyli jest liczbą pierwszą, co należało udowodnić.

5. Analizując ostatnie cyfry liczb postaci $(2^p - 1) \cdot 2^{p-1}$ dla nieparzystych p , można łatwo zauważyć, że są dwie możliwości: 6 i 8.

6. Patrząc na dwie ostatnie cyfry nieparzystych potęg dwójki (z wyjątkiem pierwszej), można zauważyć, że parzyste liczby doskonale są postaci $(20k+16)(40k+31)$ lub $(20k+7)(20k+4)$. Dwucyfrowe końcówki takich liczb to 16, 36, 56, 76, 96 i 28. Wszystkie występują dopiero w 10 najmniejszych liczbach doskonałych (z których ostatnia to 191 561 942 608 236 107 294 793 378 084 303 638 130 997 321 548 169 216).

7. Jest to p jedynek (bo $2^p - 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{p-1}$) i $p-1$ zer (bo mnożenie przez k -tą potęgę dwójki odpowiada w systemie dwójkowym dopisaniu k zer).

Zadania z artykułu Rozkosze Łamania Głowy

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

A to dopiero. Możliwe są następujące sytuacje: 1) bumbram:sztykle i głątwy bimbambolą, dingusy tentegują albo transmogryfikują, a wichajstry robią cokolwiek; 2) bumbramsztykle robią cokolwiek, głątwy bimbambolą, a dingusy i wichajstry obcyndalają się; 3) bumbramsztykle robią cokolwiek, dingusy bimbabola, wichajstry obcyndalają się, a głątwy nie tentegują (obcyndalają się, bimbambolą albo transmogryfikują). **Kajak.** Chodzą o iloczyn 7, 13 i 1009. **Odwiedziny.** Gacek i Placek.

Zadania z artykułu Opakowania i inne rombościany

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

1. wielościan rombowy	sześciścian	dwunastościan I rodz.	dwunastościan II rodz.	dwudziestościan	trzydziestościan
liczba wierzchołków	8	14	14	22	32
liczba krawędzi	12	24	24	40	60

2. Biorąc 6 dowolnych przystających rombów możemy zbudować z nich sześciścian, w którego dwóch wierzchołkach spotykają się 3 kąty ostre, a w pozostałych sześciu 2 kąty rozwarte i 1 ostry. Jeżeli kąt rozwarty rombu jest mniejszy niż 120° , to można zbudować również drugi sześciścian – w dwóch jego wierzchołkach spotykają się 3 kąty rozwarte, a w pozostałych sześciu – 2 kąty ostre i 1 rozwarty.

Zadania z I etapu eliminacji II Mistrzostw Polski w GMiL 2003 (zamieszczonych na wkładce do numeru 4/2003)

1. Prostokąt miał 5×6 cm. 2. 108 osób. 3. 2, 7, 12. 4. Najmniejsza suma to 101 gr, największa – 143 gr. 5. Wiek Waldka to 10 lat, liczba uczniów w tym wieku – 16. 6. Najmniejsza liczba operacji to 4. 7. 254 owce. 8. Imię Ani skreślono na 5 kartach. 9. Najtańsza książka kosztowała 10 zł. 10. Kapitan miał 70 lat, a jego wnuk 12. 11. Marek i Paweł. 12. Najmniejsza liczba operacji to 10 (patrz tabela). 13. Patrz rysunek.

14. $W(\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$. 15. $8\sqrt{13} + 6\sqrt{3}$ cm. 16. Rozpoczynający ma strategię wygrywającą. Liczba możliwych ruchów rozpoczęcia 3. Z pudełka A wybiera 9 żetonów, z B wybiera 2,

z C – 8. 17. Najmniejsze n to 57. 18. $\sum_{k=1}^{p-1} r_k = \frac{1}{2} p^2 (p-1)$.

nr talerzyka	1	2	3	4	5
liczba operacji	4	4	2	0	0



Wśród Czytelników, którzy do końca czerwca 2004 nadesłali na adres redakcji prawidłowe rozwiązania zadań konkursowych, rozlosujemy nagrody.

Główna nagroda (za rozwiązanie przynajmniej 12 zadań) – **200 zł**,

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) – po **100 zł**,

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) – po **50 zł**.

Na kopertę prosimy nakleić kupon konkursowy.

Krzyżówka z pączkiem

1	2		3		4
	5	6			
7		8		9	
10	11		12		13
	14	15			
16				17	

Na podstawie poniższych informacji rozwiąż krzyżówkę wpisując w każde pole jedną cyfrę.

Sumy cyfr znajdujących się na przekątnych są równe, a suma wszystkich wpisanych do krzyżówki cyfr wynosi 110.

Pan Górecki jest cukiernikiem. Ma matkę – staruszkę, żonę oraz czworo dzieci: Anię, Waldka, Basię i Zenka, z których każde jest w innym wieku.



POZIOMO:

- wiek Ani – najmłodszego dziecka pana Góreckiego, która 3 lata temu miała połowę lat najstarszego brata Zenka,
- liczba pączków sprzedanych wczoraj w cukierni pana Góreckiego,
- wielokrotność wieku pana Góreckiego,
- powierzchnia mieszkania pana Góreckiego wyrażona w metrach kwadratowych,
- wiek seniorki rodu Góreckich, która za rok będzie miała tyle lat, ile będą miały łącznie wszystkie dzieci jej syna,
- 8 poziomo dodać 17,
- wyrażona w groszach kwota, jaką zapłaciła za kupione pączki z adwokatem sąsiadka państwa Góreckich,
- 4 pionowo pomnożone przez 23,
- 6 pionowo minus 10 poziomo.

PIONOWO:

- podwojona suma cyfr znajdujących się w drugiej kolumnie krzyżówki,
- suma iloczynów: 9 pionowo i 110 oraz 15 pionowo i 99,
- wiek siostry pana Góreckiego o 7 lat młodszej od brata, która za 2 lata będzie miała tyle lat, co w tym czasie synowie pana Góreckiego razem,
- numer domu państwa Góreckich,
- wiek pana Góreckiego, który ma tyle lat, ile trójka jego młodszych dzieci razem,
- wyrażona w groszach cena jednego pączka z adwokatem,
- iloczyn lat Waldka, który nie ukończył jeszcze 16 lat, oraz Basi, która już jest pełnoletnia, powiększony o wiek ich ojca,
- 16 poziomo minus 11 pionowo,
- wyrażona w groszach cena pączka nadziewanego dziką różą.



Na odpowiedzi czekamy

dwunastościan gwiaździsty mały



mozaika w bazylice Św. Marka w Wenecji

Czytaj w dziale
„Zrób sobie bryłkę” s. 28.

