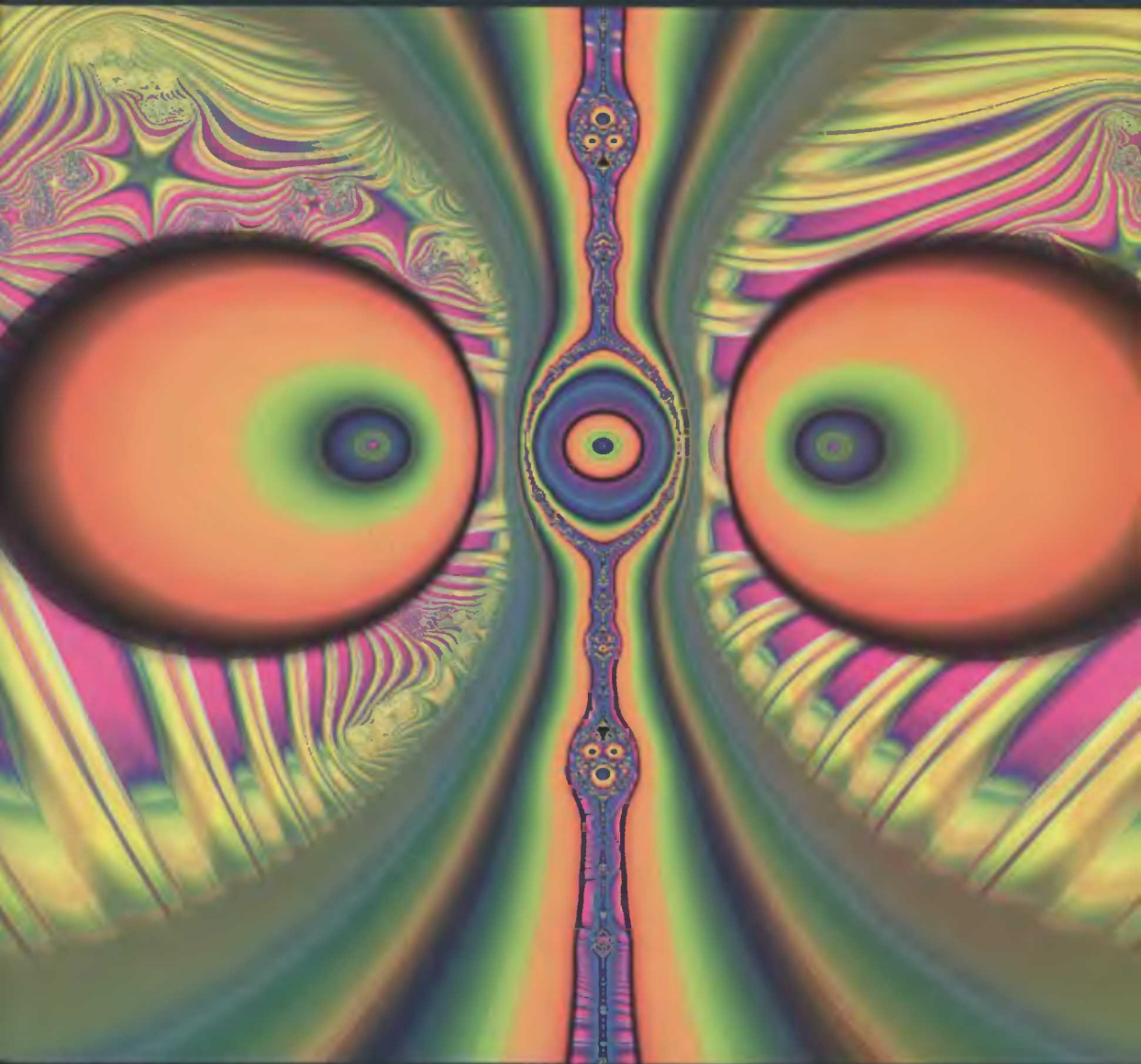


magazyn miłośników matematyki

kwartalnik nr 2(3) kwiecień 2003 cena 5 zł (0% VAT) ISSN 1643-9481 indeks 372366



W numerze: Matematyczne zmagania, Gry, w które gramy, Samouczek zadaniowy, Z życia liczb, Zrób sobie bryłkę, Łamanie głowy, czyli burza w mózgu...

Matematycy o matematyce:

Matematyka jest tym, czym zajmują się ludzie kompetentni.

David Hilbert

Matematyka jest nauką eksperymentalną!

Kazimierz Szymiczek

Matematyka to nauka o liczbach, przestrzeni i granicy. Reszta jest tylko ich sprytną kombinacją.

Marek Kordos

Matematyka jest sztuką wyciągania wniosków z odpowiednio dobranych założeń.

Andrzej Mostowski

Matematyka to nauka o nieskończoności.

Herman Weyl

Matematyka jest sztuką nadawania tych samych nazw różnym rzeczom.

Henri Poincaré

Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków.

Niels Abel

Matematyka jest jedyną humanistyczną nauką ścisłą.

Michał Szurek

Drodzy Czytelnicy!

Oddajemy Wam do rąk trzeci już numer „Magazynu Miłośników Matematyki”. Z listów, które otrzymaliśmy wynika, że poprzednie dwa spotkały się z bardzo ciepłym przyjęciem z Waszej strony. Wpłynęło dużo rozwiązań zadań konkursowych. Ich autorzy rozżuceni byli od Szczecina do Zamościa i od uczniów szkoły podstawowej do zawodowych matematyków (okazuje się jednak, że w rozwiązywaniu łamigłówek ilość posiadanej wiedzy matematycznej nie ma tak istotnego znaczenia, uczniowie radzili sobie bowiem z naszymi zagadkami zdecydowanie najlepiej!). Odpowiedzi do zadań i listę nagrodzonych drukujemy na ostatnich stronach.

W bieżącym numerze pojawia się kilka nowych działów. „Samouczek zadaniowy” pozwoli mniej wprawnym łamigłówkowiczom nabywać biegłości w rozwiązywaniu zagadek logicznych, „Gry, w które gramy” to kącik dla miłośników gier rekreacyjnych i logicznych, do działu „Zrób sobie bryłkę” zapraszamy amatorów geometrii przestrzennej, mniemyjemy też łamigłówki rodzinne w cyklu „Sztafeta pokoleń, czyli 5–10–15–20”. Zaś dla wszystkich miłośników rozkoszy łamania głowy jak zwykle mamy dużą porcję problemów do rozwiązania.

Zyczymy przyjemnej i pożytecznej lektury.

Redakcja

W numerze:

Matematyczne zmagania

Paryż zaprasza mistrzów	2
Sławomir Suchanowski	
Matematyka bez granic	4
Sztafeta pokoleń, czyli 5–10–15–20 ..	5

Gry, w które gramy

Małgorzata Mikołajczyk	
Gry w skreślanki	6

Samouczek zadaniowy

Piotr Kryszkiewicz	
Fałszywe monety	14
Eugeniusz Sikorski	
Różności z rozwiązaniami	16

Z życia liczb

Waldemar Górski	
Mocna reszta	29

Zrób sobie bryłkę

Piotr Pawlikowski	
Stella octangula	30

Łamanie głowy, czyli burza w mózgu

Zadania konkursowe	32
Wyniki i podpowiedzi	35

mmm Magazyn Miłośników Matematyki

ISSN 1643-9481, NAKŁAD: 5000 egz.

WYDAWCA: Oficyna Wydawnicza ATUT Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe

RADA REDAKCYJNA

Rościsław Rabczuk
Zbigniew Romanowicz
Sławomir Suchanowski

REDAKTOR NACZELNY

Eugeniusz Sikorski

REDAKTOR ODPOWIEDZIALNY

Małgorzata Mikołajczyk

PROJEKT OKŁADKI

Adam Łowczycki

MENEDŻER TYTUŁU

Krzysztof Skwark

ADRES REDAKCJI

50-010 Wrocław, Podwale 62
tel. (0-71) 342 20 56
e-mail: mmm@atut.ig.pl

SKŁAD I ŁAMANIE

Sigma – Ewa Karolczak
53-149 Wrocław, ul. Racławicka 11/6
tel. (0-71) 361 27 41

WARUNKI PRENUMERATY

Koszt prenumeraty równa się liczbie zamawianych numerów pisma pomnożonej przez cenę pojedynczego numeru (5 zł). Każda wpłata powinna mieć adnotację, których numerów dotyczy, oraz zawierać adres zamawiającego. Można zamawiać również numery archiwalne.

Należność prosimy wpłacać na konto:

Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe
BZ WBK 1 0/Wrocław
24 1090 2398 0000 0006 0802 5123

CENNIK REKLAM

Okładka (pełny kolor):

II strona – 3000 zł, III strona – 2000 zł;

wnętrze (2 kolory):

1 strona – 1000 zł, 1/2 strony – 600 zł,
1/3 strony – 400 zł.

Podane kwoty są cenami netto, należy doliczyć 22% VAT.

Przy zamówieniu reklamy dwukrotnej udzielamy 10% rabatu, przy trzykrotnej – 15%.

Redakcja nie odpowiada za treść reklam i ogłoszeń.

Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadsyłanych tekstów. Niezamówionych materiałów nie zwracamy.

Zapraszamy do współpracy!
Redakcja

Paryz zaprasza mistrzów



W grudniu 2002 roku zakończył się I etap eliminacji do Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych, będący jednocześnie eliminacjami do finałów paryskich XVII Międzynarodowych Mistrzostw Francji w Grach Matematycznych i Logicznych. Wzięło w nim udział 4021 zawodników, z czego do II etapu zakwalifikowano 2998 osób. Wejdzie do niego jeszcze 23 finalistów paryskich z 2002 roku, którzy byli zwolnieni z udziału w I etapie.

www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html

Liczby uczestników w poszczególnych kategoriach przedstawiały się następująco:

- CE (kl. III SP) – 229 zawodników, zakwalifikowanych 210,
- CM (kl. IV SP) – 384 zawodników, zakwalifikowanych 313,
- C1 (kl. V i VI SP) – 769 zawodników, zakwalifikowanych 583,
- C2 (gimnazjum) – 1337 zawodników, zakwalifikowanych 1185,
- L1 (szkoły średnie) – 1060 zawodników, zakwalifikowanych 586,
- L2 (studenci i szkoły pomaturalne) – 45 zawodników, zakwalifikowanych 36,
- HC (zawodowi matematycy i informatycy) – 38 zawodników, zakwalifikowanych 35,
- GP (dorośli-amatorzy) – 59 zawodników, zakwalifikowanych 50.

W drugim etapie pozostali w konkursie uczestnicy mają do rozwiązania od 5 do 12 zadań (w zależności od kategorii). Na sąsiedniej stronie prezentujemy kilka zadań z tego etapu (odpowiedzi w następnym numerze).

1. Grzeczne dzieci

W klasie Tomka grzecznych dzieci jest trzykrotnie więcej niż niegrzecznych. Natomiast grupa złożona z grzecznych dziewczynek i niegrzecznych chłopców jest dwukrotnie liczniejsza od grupy złożonej z grzecznych chłopców i niegrzecznych dziewczynek. Wszystkich chłopców w tej klasie jest tylu, ile jest grzecznych dziewczynek. **Ilu chłopców jest w tej klasie, jeżeli wiadomo, że klasa ta liczy nie więcej niż 40 uczniów?**

2. Tajemniczy palindrom

Nauczyciel polecił Jankowi, aby z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 utworzył liczby trzycyfrowe wykorzystując każdą z podanych cyfr dokładnie raz. Janek napisał trzy takie liczby, a następnie obliczył ich sumę, która okazała się czterocyfrową liczbą palindromiczną. **Jaka to była liczba?**

Palindromy to wyrazy lub zdania, które brzmią tak samo czytane wprzód i wstyk, np. „kajak”, „Popija rum as samuraj i pop”. Palindromami mogą być też liczby, np. 121, 2002, 3773, 12021.

3. Konkurs matematyczny

Do ścisłego finału konkursu matematycznego jury zakwalifikowało 3 uczniów. Każdy z nich otrzymał taki sam zestaw 16 zadań. Regulamin konkursu ustala, że za prawidłowe rozwiązanie każdego z tych zadań uczeń otrzymuje 8 punktów, za nietknięte lub tylko częściowo rozwiązane zadanie otrzymuje 0 punktów, a za każde błędnie rozwiązane zadanie uczeń otrzymuje 5 punktów karnych, które odejmuje się od sumy punktów uzyskanych za prawidłowo rozwiązane zadania. Każdy z uczestników finału miał taką samą liczbę błędnie rozwiązanych zadań, ale każdy z nich miał inną liczbę zadań rozwiązanych prawidłowo. Po odjęciu punktów karnych cała trójka miała łącznie 149 punktów. **Ile zadań każdy z nich rozwiązał prawidłowo?** Jeżeli możliwe są różne odpowiedzi, należy podać wszystkie.

4. Podział kwadratu

Kwadrat o boku 10 cm podzielono linią prostą na dwie figury w taki sposób, że obwody otrzymanych figur różniły się o 8 cm, a dodatnia różnica pól tych figur była najmniejsza z możliwych. **O ile centymetrów kwadratowych różniły się pola tych dwóch figur?**

5. Sześcienna suma

Znaleźć siedem kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, których suma jest sześcianną liczbą pierwszej.

6. Podzbiór setki

Ze zbioru złożonego ze wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100 wybrano możliwie najliczniejszy podzbiór, tak aby suma żadnych dwóch liczb tego podzbioru nie dzieliła się przez ich różnicę. **Ile liczb było w tym podzbiorze?**

7. Układanie kwadratu

Dwa papierowe kwadraty o polach 9 cm^2 i 4 cm^2 należy podzielić na możliwie najmniejszą liczbę wielokątów, tak aby można było złożyć z nich kwadrat o polu 13 cm^2 . Narysować dokładnie linie podziału obu kwadratów zaznaczając liczbowo długości tych boków otrzymanych wielokątów, które leżą na bokach dzielonych kwadratów.

Matematyka bez granic

Od 6 do 9 XI 2002 r. w bułgarskim zagłębiu różanym Kazanlyk odbył się finał II Międzynarodowych Zawodów Matematycznych „Matematyka bez granic” (*Математика без граници*). Zakwalifikowała się do nich również drużyna z I LO w Legnicy – Łukasz Wolański, Michał Harasimowicz i nauczyciel – Sławomir Suchanowski.

Zawody te nie mają jeszcze zbyt długiej tradycji. Odbývają się raz w roku na przemian w mieście Izmir w Turcji i Kazanlyk w Bułgarii. Organizatorem tegorocznego konkursu była bułgarska gazeta *Matematyczna Poczta*, a patronat nad nim objął Prezydent Miasta Kazanlyk.

Konkurs przeznaczony jest dla uczniów w wieku 14–18 lat. Przystępują do niego trzyosobowe reprezentacje szkół (dwóch uczniów i nauczyciel), które rozwiązują ten sam zestaw zadań (w języku angielskim). Organizatorzy pokrywają koszty zakwaterowania i wyżywienia. Niestety, zawodnicy muszą sami znaleźć sponsora, który pokryje ich koszty podróży (w przypadku uczniów z Legnicy był to Urząd Miasta, który pokrył koszty przelotu do najwyższej położonej stolicy Europy – Sofii) i kieszonkowe.

Polscy uczestnicy zawodów wspominają gościnne przyjęcie i dni wypełnione także pozamatematycznymi atrakcjami. Była to okazja nie tylko do sprawdzenia swojej wiedzy, ale i nawiązania nowych znajomości. Nic dziwnego, że Bułgarzy należą do światowej czołówki w dziedzinie matematyki (V miejsce na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w 2002 r.) – w bułgarskich szkołach klasy o profilu matematycznym mają do 12 godzin matematyki tygodniowo! Z kolei zawodnicy z Turcji zdradzili, że mają po 3 godziny tygodniowo zajęć z geometrii, algebry i analizy matematycznej oraz dodatkowo godzinę matematycznej integracji międzyprzedmiotowej.

Organizatorzy nie ustalili jeszcze szczegółów tegorocznej edycji konkursu. Szkoły, które chciałyby się do niego zgłosić prosimy o kontakt e-mailem z redakcją MMM.

Poniżej prezentujemy zadania, z jakimi zmagali się zawodnicy w ubiegłorocznym finale (rozwiązania w następnym numerze).

1. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = a$, $AC = b$ oraz $a \leq b$. Obieramy dowolny punkt R na boku AB , a następnie tworzymy odcinki RM ($M \in BC$) i RN ($N \in AC$), takie że $\overline{RM} \parallel \overline{AC}$ i $\overline{RN} \parallel \overline{BC}$.

a) Wykaż, że: $2a \leq L_{CMRN} \leq 2b$, gdzie L_{CMRN} jest obwodem czworokąta $CMRN$.

b) Określ położenie punktu $R \in \overline{AB}$ tak, aby P_{CMRN} było największe, gdzie P_{CMRN} jest polem czworokąta $CMRN$. Odpowiedź uzasadnij.

2. Rozwiąż równanie: $\sqrt{2x^2 - 8x + 9} = \cos \pi x$.

3. Zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ jest podzielony na trzy niepuste podzbiory. Niech P_1, P_2, P_3 będą iloczynami liczb z tych podzbiorów. Wykaż, że co najmniej jedna z liczb P_1, P_2, P_3 jest większa lub równa 162. Czy liczbę 162 można zamienić na większą, tak aby powyższe warunki były nadal spełnione?

4. Niech $a \leq b \leq c \leq d$ będą liczbami rzeczywistymi, takimi że $a + b + c + d = 0$ i $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Udowodnij, że $-1 \leq bc$.

5. Wierzchołki trójkąta ABC leżą na okręgu o środku O i promieniu r będącym liczbą pierwszą, a jego boki tworzą ciąg arytmetyczny. Niech W i S będą odpowiednio środkiem okręgu wpisanego i środkiem ciężkości $\triangle ABC$. Znajdź pole $\triangle OWS$, jeżeli wiadomo, że $AB > AC > BC$ oraz $\angle AWB = 135^\circ$.

Sławomir Suchanowski

Sztafeta pokoleń, czyli 5-10-15-20

W tej rubryce prezentujemy łamigłówki powiązane tematycznie, jednak różniące się stopniem trudności. Zapraszamy do ich rozwiązywania całe rodziny – od przedszkolaków (pięciolatek) przez ich starsze rodzeństwo (dziesięcio- i piętnastolatek) do rodziców (od 20 lat w górę).

Rodzinne perypetie

5. Czy brat mojego ojca i ojciec mojego brata to to samo? A ojciec mojego syna i syn mojego ojca?

10. Spytano mnie pewnego razu, kto jest przedstawiony na portrecie wiszącym na ścianie. Odpowiedziałem: Ojciec sportretowanej osoby jest jedynym synem tego, który mówi. Czyj to portret?

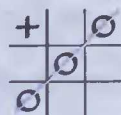
15. Czy w Honolulu mężczyzna może odziedziczyć spadek po siostrze swojej wdowy?

20. Kim byłaby dla mamy twoja babka po mieczu, gdyby po śmierci męża poślubiła dziadka po kądzieli?

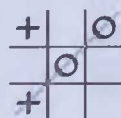
Gry w skreślanki

Gry towarzyszą człowiekowi od bardzo dawna. Świadczy o tym choćby fakt, że kostki do gry używano już 7000 lat temu (ich nazwa pochodzi stąd, że początkowo były to prawdziwe kości zwierząt, najczęściej z palca konia, krowy, kozy lub owcy). Niektóre gry wynaleziono po to, by przynosiły intelektualną rozrywkę w chwilach samotności, inne były znakomitą zabawą towarzyską, a jeszcze inne stanowiły wyzwanie do niemal sportowego współzawodnictwa. W poniższym artykule dokonamy ogólnej klasyfikacji różnych typów gier, zastanowimy się, jakie mogą być strategie, które pozwalają zawsze wygrywać, i na przykładzie jednego typu gry spróbujemy odkryć i opisać takie strategie.

Kółko i krzyżyk wcale nie musi być grą czczą. Zobaczcie sami.



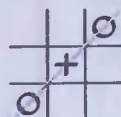
Dodatkowy ruch



Wykorzystanie zasobów przeciwnika



Elastyczna definicja zwycięstwa



Współpraca

To się nazywa twórcze podejście do rozwiązywania problemów.

(na podstawie pomysłu Scotta Thorpe)

Klasyfikacja gier

Przypomnijcie sobie różne gry, w jakie grywaliście. Pomijając gry typowo zręcznościowe spróbujmy dokonać ogólnej klasyfikacji pozostałych. Będziemy zajmowali się grami, w których przeciwko sobie gra dwóch graczy. Narzuca się dość naturalny podział na:

- **gry losowe**, w których gracze nie mają wpływu na wynik (np. wojna, bingo),
- **gry sprawiedliwe**, w których każdy z graczy ma szansę na zwycięstwo, a to, komu ono przypadnie, zależy w głównej mierze od umiejętności i doświadczenia (np. szachy, brydż sportowy),
- **miksy**, będące mieszanką poprzednich typów (np. monopol, scrabble),
- **gry zdeterminowane**, wśród których wyróżniamy:
 - **gry strategiczne**, w których jeden z graczy, grając prawidłowo, wygrywa niezależnie od sposobu gry drugiego gracza, np. setka (opisana niżej) oraz większość końcówek szachowych,
 - **gry czcze**, w których poprawna taktyka obu stron prowadzi zawsze do remisu (np. kółko i krzyżyk).

Możemy to zilustrować na diagramie:

Gry

losowe	sprawiedliwe	zdeterminowane	
		strategiczne	czcze
miksy			

Ponadto wśród wszystkich gier wyróżniamy jeszcze:

- **gry symetryczne**, w których role obu graczy są identyczne (np. warcaby, kości),
- **gry niesymetryczne**, w których role graczy się różnią (np. Master Mind, szubienica).

Problem 1

Do jakiego typu gier można zaliczyć: kości, oczko, memory, tysiąc, okręty, papier-nożyce-kamień, warcaby, go?

Problem 2

W grze w setkę dwaj gracze na przemian wymieniają coraz większe liczby od jeden do stu. Zawsze trzeba przebić liczbę podaną przez przeciwnika przynajmniej o jeden, lecz najwyżej o dziesięć. Wygrywa gracz, który pierwszy powie sto. Kto ma w tej grze strategię wygrywającą? Jaki ciąg liczb ją realizuje?

Problem 3

Dwaj gracze dysponują identycznymi zestawami monet (w nieograniczonej ilości). Wybierają na zmianę po jednej monecie ze swojego zestawu i kładą w dowolnym miejscu na stole. Przegrywa ten gracz, który nie znajdzie miejsca na dołożenie kolejnej monety. Jaki jest typ opisanej gry? W przypadku gdy jest to gra strategiczna, podaj, który z graczy posiada strategię wygrywającą i na czym ona polega.

Z dalszych rozważań wykluczmy gry będące mikсами.

Twierdzenie

Jeśli gra nie jest losowa i nie dopuszcza remisów, to jest grą strategiczną.

Problem 4

Podaj przykład gry bez remisów niebędącej grą strategiczną.

Z udowodnionego wyżej twierdzenia wynika, że nie istnieją gry sprawiedliwe, jeśli tylko skasujemy remis przez wprowadzenie jakichś dodatkowych reguł. Wtedy zawsze otrzymamy grę strategiczną. Tak jest np. z szachami (jeśli usuniemy remis). Nie wiemy jednak, który z graczy ma w tym przypadku strategię wygrywającą ani jaki sposób gry gwarantuje jej realizację. Może być też tak, że szachy są grą czczą, ale nawet gdybyśmy to wiedzieli, należałoby odkryć sposób gry gwarantujący remis. Ogłoszenie takiej teorii spowodowałoby zapewne upadek szachów, co byłoby tragedią dla tysięcy amatorów tej starej i pięknej gry. Miejsmy więc nadzieję, że nieprędko to nastąpi.

Gry nielosowe są więc z natury zdeterminowane, ale tak długo, jak długo nie znamy strategii prowadzącej do wygranej lub remisu, pozostają dla graczy grami sprawiedliwymi.

Dowód

Załóżmy, że gracz A nie ma strategii wygrywającej. Wtedy dla każdego ruchu wykonanego przez A istnieje taki ruch B, że gra nie skończy się wygraną A. Skoro jednak w grze nie ma remisów, musi wygrać B. To znaczy, że istnieje taki ciąg ruchów gracza B, że – niezależnie od tego, co zrobi A – B wygra. A to właśnie oznacza, że B ma strategię wygrywającą.

Zadanie dla Czytelników

Opisaną wcześniej grę setka można interpretować jako ujmowanie kamieni ze stosu liczącego 100 sztuk wg podanych reguł. Bardziej skomplikowaną, a przez to ciekawszą odmianą tej gry jest starożytna gra chińska fan-tan (w Polsce znana pod nazwą gry w kupki). Tym razem mamy trzy stosy kamieni, z których dwaj gracze odejmują kolejno dowolną ich liczbę, z tym jednak zastrzeżeniem, że w danym ruchu można zabierać kamienie tylko z jednego stosu. Wygrywa ten, kto zabierze ostatnie kamienie. Znajdź strategię wygrywającą przy założeniu, że początkowa liczba kamieni w każdym ze stosów wynosi 7.

Wśród osób, które do końca czerwca przysłały do redakcji poprawne rozwiązania, rozlosujemy nagrody książkowe.

Typy strategii wygrywających

Zastanówmy się, kto w grze zdeterminowanej może mieć strategię wygrywającą.

Problem 5

Podaj przykład gry, w której strategię wygrywającą posiada:

- gracz rozpoczynający rozgrywkę,
- gracz wykonujący swój pierwszy ruch jako drugi.

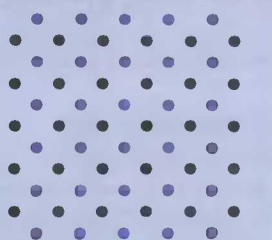
Na ogół strategia wygrywająca należy do gracza rozpoczynającego grę (nazwijmy go **otwierającym**) lub do tego, który wykonuje swój pierwszy ruch jako drugi (nazwijmy go **zamykającym**). Jeśli jednak w grze zadania obu graczy nie są jednakowe (gra niesymetryczna), wtedy jedna z ról może być uprzywilejowana. W takiej grze przywilej roli może być bezwarunkowy lub zależeć od tego, czy gracz uprzywilejowany jest otwierającym czy zamykającym. Ostatecznie możemy więc mieć do czynienia aż z sześcioma rodzajami strategii wygrywających.

Problem 6

Wymień wszystkie rodzaje strategii wygrywających i podaj przykłady gier, w których te strategie występują.

Bridge-it

Bridge-it [czyt. brydżyt] to nazwa gry popularnej w Stanach Zjednoczonych w latach pięćdziesiątych. Po polsku można ją nazwać *połącz to*. Standardową planszę do gry przedstawia rysunek 1. Dwaj gracze A i B wykonują ruchy na zmianę. Gracz A na czarno łączy dowolne dwa sąsiednie punkty czarne, a gracz B na zielono – zielono. Linie postawione przez obu graczy nie mogą się przecinać. Wygrywa ten, kto pierwszy połączy łamaną dwa przeciwne boki (złożone z 5 punktów) swojego koloru.



Rys. 1. Plansza do gry 5 x 6

Zachęcamy w tym miejscu Czytelników do przerwania lektury i rozegrania kilku partii tej gry. Jaki to rodzaj gry?

Problem 7

Rozegraj kilka partii *bridge-it* na planszy 2 x 3.

- Który gracz ma przewagę w grze?
- Czy gra może zakończyć się remisem?
- Opracuj (o ile istnieje) strategię wygrywającą (dla planszy 2 x 3). Jaki to typ strategii?

Z obserwacji wynika, że w grze nie ma remisów, a wygrywa na ogół osoba rozpoczynająca grę. Nie może to być przypadek, bo przecież wiemy, że nielosowa gra bez remisów jest grą strategiczną. Dla małych plansz łatwo jest opisać strategię wygrywającą, ale dla dużych bywa to kłopotliwe. Nawet jeśli uzasadnimy, że gra nie może skończyć się remisem, co da nam pewność istnienia strategii wygrywającej, musimy jeszcze opisać ciąg ruchów, który tę strategię realizuje. Przy dużych planszach nie jest to łatwe. Trzeba przecież przewidzieć wszystkie warianty ruchów przeciwnika.

Od bridge-it do skreślanki

Zmodyfikujemy trochę sposób rozgrywania *bridge-it*. Na planszy zaznaczamy wszystkie możliwe ruchy gracza „czarnego” i „zielonego”. Taką planszę (rys. 2) nazywamy **diagramem możliwych ruchów**.

Oczywiście odcinków przerywanych nie ma sensu prowadzić. Nie będziemy ich więc rozpatrywać i ściągniemy do jednego punktu każdą piątkę punktów „brzegowych” (rys. 3).

Na tak zmodyfikowanej planszy celem gracza „czarnego” jest połączenie punktów P i K , a gracza „zielonego” – połączenie punktów P' i K' .

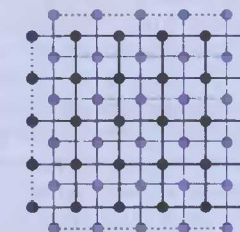
Zauważmy, że na diagramie każdy odcinek zielony przecina dokładnie jeden odcinek czarny, więc gdy jeden z graczy wykonuje ruch, to uniemożliwia dokładnie jeden ruch drugiemu graczowi. Wygląda to tak, jakby np. gracz „zielony” przekreślał jedną krawędź grafu czarnego. Można sobie wyobrazić, że gracz ten zamiast przekreślać krawędź zamalowuje ją po prostu na zielono.

Możemy więc grać w *bridge-it* jeszcze inaczej. Zostawiamy tylko jeden graf, np. czarny, rysujemy go kolorem neutralnym (rys. 4) i gracze kolejno kolorują jego krawędzie. Gracz A (czarny) chce połączyć wierzchołki P i K , a gracz B (zielony) chce mu w tym przeszkodzić.

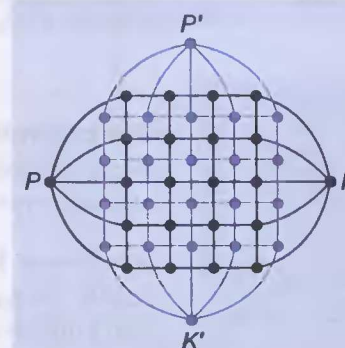
Teraz oczywiste jest, że w *bridge-it* nie ma remisów (albo wierzchołki P i K zostaną połączone i wygra A, albo nie i wygra B). Ale gra przestała być też symetryczna. Role graczy są teraz różne.

(Uwaga tylko dla dorosłych!) Stwierdzenie, że nowa wersja gry jest równoważna starej, nie jest wcale faktem oczywistym. Należałoby przekonać się, że sytuacji, w której wierzchołki P i K nie zostają w grze połączone, odpowiada w pierwotnej wersji istnienie kolorowego połączenia pomiędzy wierzchołkami P' i K' . Obserwacja ta równoważna jest twierdzeniu o zaminowanych polach szachownicy. Jeśli miny rozstawione są tak, że niemożliwe jest przejście królem z dowolnego pola na lewym brzegu szachownicy na jakiekolwiek pole na brzegu prawym, to istnieje droga wieży pomiędzy górnym i dolnym rzędem szachownicy przechodząca tylko po polach zaminowanych.

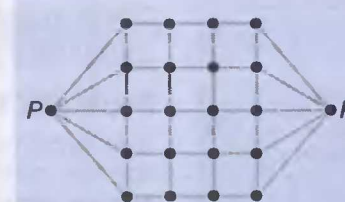
Opisana wyżej wersja *bridge-it* jest przykładem gry zwanej *skreślanką Chennona* (od nazwiska francuskiego matematyka Clauda Chennona [czyt. kłoda szenona]). Można w nią grać według podanych reguł na dowolnym grafie wybierając dowolną parę jego wierzchołków za punkty P i K . Oczywiście każda skreślanka jest grą bez remisów, zatem – na podstawie udowodnionego wcześniej twierdzenia – istnieje strategia wygrywająca. Tylko który z graczy ją posiada i jak ją znaleźć?



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Twierdzenie

W przypadku gry w skreślanek, jeśli gracz zamykający ma strategię wygrywającą, to będzie miał ją również wtedy, gdy rozpocznie grę.

Dowód

Gdy gracz zamykający ma strategię wygrywającą i zaczyna grę, to w pierwszym ruchu koloruje dowolną krawędź grafu, a potem odpowiada na ruchy przeciwnika zgodnie ze strategią. Ilekroć okazuje się, że to, co trzeba teraz pokolorować, już jest zamalowane, koloruje znowu dowolną krawędź. W ten sposób ma zawsze jedną zapasową krawędź w swoim kolorze, co w żaden sposób nie może mu przeszkodzić w zwycięstwie.

W ten sposób ograniczyliśmy liczbę możliwych typów strategii przy grze w skreślanek. Może zająć jedna z trzech możliwości:

- strategię wygrywającą ma gracz otwierający (gra typu O);
- strategię wygrywającą ma gracz łączący wierzchołki P i K niezależnie od tego, czy jest otwierającym czy nie (gra typu Ł);
- strategię wygrywającą ma gracz „rozcinający” połączenie między P i K niezależnie od tego, czy jest otwierającym czy nie (gra typu R).

Problem 8

Spróbuj zagrać w skreślanek na kilku prostych grafach i zbadać, jaki typ strategii mają te gry.

Ważna obserwacja

Typ strategii wygrywającej zależy od grafu, na którym rozgrywamy skreślanek.

Problem 9

Podaj przykłady grafów o tej własności, że rozgrywana na nich skreślanek jest grą typu odpowiednio O, Ł, R.

Problem 10

Zbadaj, jaki typ strategii wygrywającej odpowiada skreślanke rozgrywanej na każdym z grafów z rysunku 5.

Problem 11

Jaki typ strategii wygrywającej ma skreślanek rozgrywana na dowolnym drzewie? Drzewo to graf, w którym nie ma drogi, po której można by chodzić w kółko. Przykłady drzew przedstawia rysunek 6.

Problem 12

Jakim typem skreślanek jest *bridge-it*?

Nowy wariant gry w skreślanek

Zauważmy, że przy grze w skreślanek gracz, który chce uniemożliwić połączenie wierzchołków P i K , kolorując daną krawędź uniemożliwia przeciwnikowi przejście po niej. Jest więc tak, jakby tę krawędź z grafu usuwał. Z kolei gracz, który chce połączyć P z K , kolorując krawędź pomiędzy wierzchołkami x i y powoduje, że możemy je traktować jak jeden nowy wierzchołek, który musi zostać połączony drogą zarówno z P jak i z K . Możemy myśleć, że krawędź xy jest stopniowo skracana, aż wierzchołki x i y zleją się w jeden punkt. Taką operację nazywamy **ściągnięciem krawędzi** xy . Jeśli przez rząd wierzchołka rozumiemy liczbę linii, które z niego wychodzą, to rząd tego nowopowstałego wierzchołka wynosi wtedy $\text{rząd}(x) + \text{rząd}(y) - 2$ (dłaczego?).

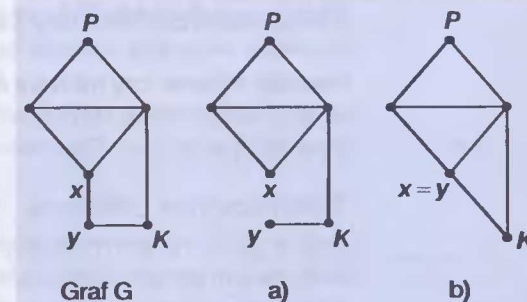
Nowa wersja gry w skreślanek polega na tym, że zamiast kolorować gracz rozcinający usuwa z grafu krawędzie, a gracz łączący – ściąga je. W takiej wersji stale zmienia się graf, na którym prowadzona jest rozgrywka. Rysunek 7 przedstawia nowe grafy powstałe z grafu G po „zamalowaniu” krawędzi xy przez:

- gracza rozcinającego,
- gracza łączącego.

W ten sposób przekształciliśmy „skreślanek” w swoistą „ściąganko-rozcinanek” otrzymując nową wersję gry równoważną poprzedniej.

Na czym polega wygrana każdego z graczy w nowej wersji gry?

Łatwo zobaczyć, że gracz łączący wygra, jeśli w którymś kroku wierzchołki P i K zleją się ze sobą. Natomiast gracz rozcinający wygra wtedy, gdy w jakimś momencie gry graf rozpadnie się na kilka części (stanie się niespójny) i wierzchołki P i K będą leżały w różnych jego częściach. Czytelnicy wprawni w programowaniu komputera lub kalkulatora graficznego z łatwością mogą zasymulować na nim taką rozgrywkę.



Rys. 7

Skreślanki na drzewach

Spróbujmy prześledzić, jak przebiega gra w skreślanek na grafie, który jest drzewem.

Problem 13

Spróbuj zagrać w skreślanek na kilku drzewach. Opisz, jakim zmianom ulega ten graf w czasie gry.

Ważna obserwacja

Łatwo zauważyć, że po ściągnięciu dowolnej krawędzi przez gracza łączącego graf nadal pozostaje drzewem (bo nie mogła na skutek tego zamknąć się żadna droga), natomiast zabranie dowolnej krawędzi przez gracza rozcinającego zawsze powoduje rozpadnięcie się grafu na dwie części.

Niech $G(x)$ i $G(y)$ oznaczają części, na które rozpada się drzewo G po usunięciu zeń krawędzi xy , zawierające odpowiednio wierzchołki x i y . Udowodnimy następujące:

Twierdzenie o dwóch drzewach

Niech G i H będą dwoma drzewami zbudowanymi na tym samym zbiorze wierzchołków. Wtedy (po usunięciu z drzewa G krawędzi xy) w drzewie H istnieje taka krawędź, że jeden jej koniec należy do $G(x)$, a drugi do $G(y)$.

Sprawdź to na przykładach kilku drzew.

Prima aprilis,
prima aprilis,
czytaj powoli,
bo się pomylisz

Na parterze do windy wsiadło 5 osób. Winda zatrzymywała się tylko na ostatnim piętrze i wtedy wysiadło z niej 9 osób. Jak to się stało?

Dowód

Gdyby nie istniała w drzewie H żądana krawędź, to graf składałby się z dwóch kawałków (byłby niespójny) i nie byłby drzewem.

Skreślanki typu Ł

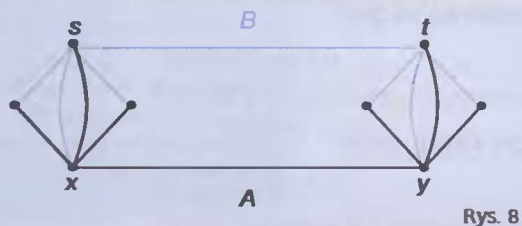
Powstaje pytanie, czy można z kształtu grafu, na którym rozgrywana jest skreślanka (a przecież może on być bardzo skomplikowany), rozpoznać typ strategii wygrywającej w tej grze. Odpowiemy na to pytanie w przypadku gier typu Ł.

Twierdzenie Lemana

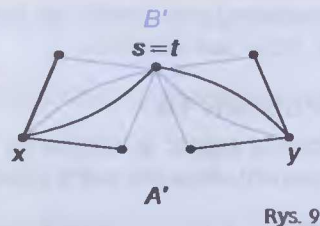
Jeśli w grafie, na którym rozgrywana jest skreślanka, istnieją dwa drzewa zbudowane na tym samym zbiorze wierzchołków (niekoniecznie muszą to być wszystkie wierzchołki grafu), zawierające punkty P i K i niemające wspólnych krawędzi, to skreślanka jest grą typu Ł. (Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne.)

Dowód

Niech graf G zawiera drzewa A i B , o których mowa w twierdzeniu (np. na rys. 8 i dalszych A ma krawędzie czarne, a B – zielone). Zauważmy, że jeśli na pewnym etapie gry gracz rozcinający usunął krawędź xy z drzewa A , to na podstawie twierdzenia o dwóch drzewach w B istnieje krawędź st mająca wspólny wierzchołek z każdą z części $A(x)$ i $A(y)$. Jest to krawędź różna od xy (bo A i B nie mają wspólnych krawędzi), zatem gracz łączący może ją ściągnąć. Jeśli krawędź st pokrywała się z krawędzią PK , to gra jest zakończona (P i K złąły się), jeśli nie – to w nowym grafie znajdziemy drzewa A' i B' spełniające nadal warunki twierdzenia – mają te same wierzchołki, nie mają wspólnych krawędzi i zawierają punkty P i K (na rys. 9 i dalszych A' ma krawędzie czarne, B' – zielone).



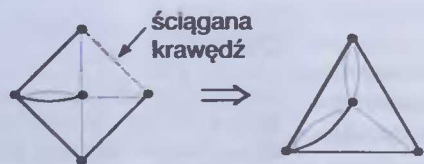
Rys. 8



Rys. 9

Strategia wygrywająca gracza łączącego polega na zapewnieniu, by w każdym momencie w grafie istniały dwa drzewa z twierdzenia Lemana (wtedy utrzymywane są dwie drogi od P do K , więc jeśli jedna zostanie rozcięta przez przeciwnika, to łączący może wykorzystać drugą). Można to osiągnąć pod warunkiem, że na początku gry takie drzewa istniały. Ruchy gracza łączącego powinny być następujące:

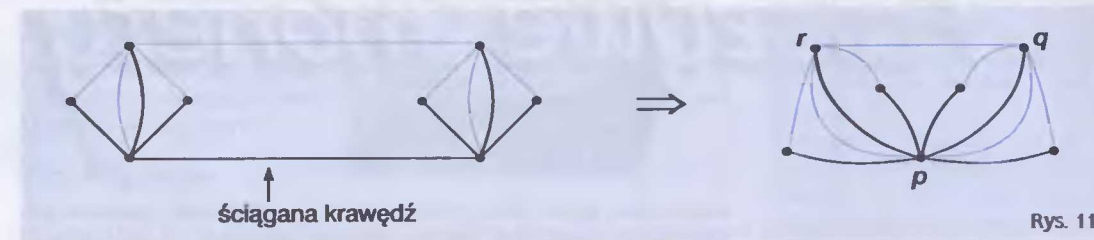
- jeśli rozcinający usunął krawędź z jednego z drzew Lemana, to łączący ściąga odpowiednią krawędź w drugim drzewie (tak jak opisano wyżej),
- jeśli rozcinający usunął krawędź nie należącą do żadnego z drzew Lemana, to... no, właśnie, co powinien zrobić wtedy gracz łączący?



Rys. 10

Ściągnięcie krawędzi poza drzewami Lemana nie przybliży go do celu. Może też popsuć własności drzew Lemana (patrz rys. 10). Gracz łączący

powinien ściągnąć dowolną krawędź leżącą na drodze od P do K w jednym z drzew Lemana. Taki ruch może jednak także spowodować zepsucie jednego z drzew Lemana i powstanie zamkniętej drogi (rys. 11 – $pqrp$).

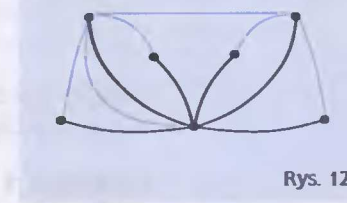


Rys. 11

Aby zachować istnienie drzew Lemana, gracz łączący powinien „wywabić” kolor z jednej krawędzi tzn. usunąć ją z drzewa Lemana (np. tak jak na rys. 12). Po każdej parze ruchów liczba wierzchołków grafu zmniejsza się o jeden, więc prędzej czy później punkty P i K zleją się, a tym samym gra zakończy się zwycięstwem łączącego.

Koniec dowodu

Istnieje podobne twierdzenie charakteryzujące grafy, na których skreślanka jest grą typu R. Natomiast w przypadku gry typu O pierwszy „dobry” ruch przekształca ją w Ł-grę lub R-grę.

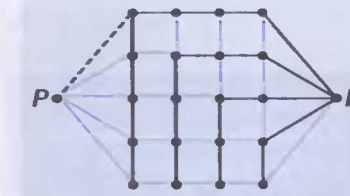


Rys. 12

Bridge-it raz jeszcze

Opisaliśmy strategię gry w skreślankę typu Ł wykorzystującą drzewa Lemana, ale jak przekonać się, że takie drzewa w danym grafie istnieją? I jak je znaleźć? Odpowiedzi na te pytania nie są znane. Nie ma algorytmu wyznaczania drzew Lemana w dowolnym grafie. W przypadku grafów o kilkunastu lub kilkudziesięciu wierzchołkach jest to zadanie dość trudne.

Diagram do gry *bridge-it* ma 22 wierzchołki. Spróbujmy opisać strategię tej gry. Wiemy, że jest to gra typu O. Założmy, że otwierającym jest gracz łączący. Powinien wykonać taki ruch, aby po ściągnięciu wybranej krawędzi w nowym diagramie istniały dwa drzewa Lemana. Wtedy będzie mógł grać dalej według strategii skreślanki Ł. Rysunek 13 przedstawia pierwszy ruch gracza łączącego (linia przerywana) oraz drzewa Lemana rozpięte na wierzchołkach nowego grafu (krawędzie czarne i zielone).



Rys. 13

Problem 14

Zaznacz na diagramie sposób rozgrywania *bridge-it* w powyższym przypadku. Zaznacz pary krawędzi, dla których usunięcie jednej z nich powoduje konieczność ściągnięcia drugiej.

Problem 15

Wskaż inne prawidłowe debiuty (pierwsze ruchy) gracza łączącego.

Małgorzata Mikołajczyk

Rozwiązania problemów w następnym numerze.

Falszywe monety

W zadaniach łamigłówek często pojawia się problem wyznaczenia fałszywej spośród zestawu jednakowych z wyglądu monet. Moneta fałszywa zawsze różni się tylko wagą, a monety prawdziwe ważą tyle samo. Zadanie należy rozwiązać przy użyciu wagi szalkowej bez odważników i minimalnej liczby ważeń. Poniżej znajdziecie kilka rozwiązanych zadań tego typu oraz dalsze przykłady do samodzielnego rozwiązania.

Pierwszy typ zadań to zestawy z jedną fałszywą monetą, o której wiemy, czy jest lżejsza, czy cięższa niż każda z pozostałych.

Zadanie 1

Na stole leżą trzy monety. Wiadomo, że jedna z nich jest fałszywa i cięższa od pozostałych. Ile ważeń trzeba wykonać, aby znaleźć tę monetę?

Rozwiązanie

Wystarczy jedno ważenie. Jedną monetę pozostawiamy na stole, a pozostałe kładziemy na obu szalkach wagi. Jeśli waga przechyli się, to w stronę fałszywej monety. Jeśli pozostanie w równowadze, to fałszywa moneta leży na stole.

Zadanie 2

Wśród dziewięciu monet jedna jest fałszywa i cięższa od pozostałych. Ile ważeń należy wykonać, aby ją wskazać?

Rozwiązanie

Jedno ważenie nie wystarczy, bo rozkładając monety w dowolny sposób, fałszywa zawsze może znaleźć się w grupie zawierającej co najmniej trzy monety i nie będziemy mogli jej wskazać.

Dwa ważenia wystarczą. W pierwszym na szalkach kładziemy po trzy monety (i trzy zostają na stole). Dzięki temu wiemy, w której trójce jest moneta fałszywa. Do jej wykrycia wystarczy jedno ważenie (zad. 1).

Zadanie 3

Na stole leżą 162, wśród nich fałszywa, cięższa od pozostałych. W ilu ważeniach potrafisz ją wskazać?

Odpowiedź

Wystarczy 5 ważeń (wskazówka – kładziemy na szalki po 54 monety, potem po 18 z grupy, w której jest fałszywa, a potem po 9; dalej jak w zadaniu 2).

Drugi typ zadań to zestawy z jedną fałszywą monetą, o której nie wiemy, czy jest lżejsza, czy cięższa. Chcemy nie tylko wskazać tę monetę, ale stwierdzić, jak różni się od pozostałych.

Zadanie 4

Wśród pięciu monet jest jedna fałszywa, i różni się wagą od pozostałych. Ile ważeń wystarczy, by ją znaleźć i stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa?

Rozwiązanie

Na szalkach kładziemy po dwie monety. Jeśli waga pozostanie w równowadze, fałszywa moneta leży na stole i drugie ważenie pozwoli stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa.

Jeśli waga się przechyli, to moneta pozostała na stole jest dobra. Podmierny ją z jedną z monet na „cięższej” szalce. Co może się wtedy stać? Czy wychylenie wagi może zmienić się na przeciwne? Dlaczego nie? Po zamianie albo waga wróci do położenia równowagi (to znaczy, że odłożona moneta była fałszywa i cięższa), albo nic się nie zmieni. To z kolei oznacza, że albo druga moneta na „cięższej” szalce była fałszywa i cięższa, albo fałszywa moneta jest lżejsza i leży na szalce przeciwnej. Aby to stwierdzić trzeba, wykonać trzecie ważenie, porównując np. dwie monety z szalki „lżejszej”. Zatem w najgorszym wypadku wystarczą trzy ważenia.

Zadanie 5

Wśród a) 9, b) 12 monet jest jedna fałszywa, która różni się wagą od pozostałych. Ile ważeń wystarczy, aby wykryć tę monetę i stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa?

Odpowiedź

a) 3 (dzielimy monety na 3 grupy po 3), b) 3 (dzielimy monety na 4 grupy po 4).

Trzeci typ zadań to zestawy z jedną monetą fałszywą, o której nie wiemy, czy jest lżejsza, czy cięższa i albo chcemy tylko wskazać tę monetę, albo tylko dowiedzieć się, jak różni się od pozostałych.

Zadanie 6

Wśród 15 monet jedna jest fałszywa i różni się wagą od pozostałych. Czy dwa ważenia wystarczą, by stwierdzić, czy fałszywa moneta jest lżejsza, czy cięższa?

Odpowiedź

Tak. Dzielimy monety na trzy grupy po 5.

Zadanie 7

Wśród czterech monet jest jedna fałszywa. Ile ważeń wystarczy, aby ją wskazać, jeśli:

a) chcemy wiedzieć, czy jest lżejsza, czy cięższa? b) nie chcemy tego wiedzieć?

Odpowiedź

a) potrzebne 3 ważenia, b) wystarczą 2 ważenia.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1) Wśród czterech jednakowych monet jedna jest fałszywa i różni się od pozostałych ciężarem. Czy dwa ważenia wystarczą, by wskazać fałszywą monetę i stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa, jeśli mamy do dyspozycji pięć monet, o której wiemy, że jest prawdziwa?

2) Kasia ma w pudełku jednakowe monety. Okazało się, że jedna z nich ma inną masę od pozostałych, ale nie wiadomo, czy jest cięższa, czy lżejsza. Kasia umie ją znaleźć za pomocą trzech ważeń. Ile ma monet?

3) Wśród 13 jednakowych z wyglądu monet jedna jest fałszywa i różni się wagą. Wskaż ją w trzech ważeniach.

4) Na stole leży: a) 9, b) 16 różnych monet. Żadne dwie nie mają takiej samej wagi. Za pomocą ilu ważeń można wyznaczyć najcięższą monetę? A dwie najcięższe?

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1) Ile ważeń potrzeba i jak je przeprowadzić, aby wskazać fałszywą monetę wśród:

a) 10, b) 27, c) 30?

2) Kasia ma w pudełku jednakowe monety. Okazało się, że jedna z nich jest cięższa od pozostałych. Kasia umie ją znaleźć za pomocą trzech ważeń. Ile ma monet?

3) Uogólnij powyższe zadania.

Różnicowości z rozwiązaniami

Poniżej znajdziecie kilka zadań tekstowych z pełnymi rozwiązaniami. Spróbujcie je najpierw zrobić samodzielnie, a potem przeczytajcie proponowane przez nas rozwiązania. Są one adresowane nie tylko do tych uczniów, którzy dobrze umieją matematykę i lubią się zmagać z nowymi problemami, ale i do tych, którzy radzą sobie z tym przeciętnie, ale są ambitni i w przyszłości chcieliby dorównać najlepszym. Rozwiązania są często opatrzone dokładnymi komentarzami, które wyjaśniają wszelkie wątpliwości, dlatego czytajcie je w skupieniu i bez pośpiechu. Dzięki temu w przyszłości na pewno będziecie się dużo pewniej poruszali w obszarze matematyki.

Isaac Newton (1642–1727) – genialny fizyk i matematyk, twórca rachunku różniczkowego i całkowitego – twierdził, że przy uczeniu się zadania tekstowe są pożyteczniejsze od reguł. W swojej *Arytmetyce ogólnej* podawał jako ćwiczenia wiele zadań tekstowych, wśród których jednym z najciekawszych jest zadanie o bykach na pastwisku. Zapoznajmy się z nim.

1. Trzy pastwiska

Trzy pastwiska pokryte trawą o jednakowej gęstości i jednakowo szybko rosnącą mają następujące pola powierzchni: $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha i 24 ha. Trawę na pierwszym pastwisku 12 byków zjadło w ciągu 4 tygodni, trawę na drugim – 21 byków w 9 tygodni. Ile byków zje trawę na trzecim pastwisku w ciągu 18 tygodni?

Rozwiązanie

Ilość trawy, jaką zjada jeden byk w ciągu jednego tygodnia, nazwijmy „porcją”. Ponieważ pastwiska pokryte są trawą o jednakowej gęstości, na powierzchni jednego hektara każdego z pastwisk w momencie rozpoczynania wypasu jest taka sama liczba porcji trawy. Oznaczmy tę liczbę przez x . Wiemy, że trawa na pastwiskach rośnie jednakowo szybko, więc na powierzchni jednego hektara każdego z pastwisk w ciągu jednego tygodnia przyrasta taka sama liczba porcji trawy. Oznaczmy tę liczbę przez y .

Teraz warunki zawarte w tekście zadania i wyrażone tam językiem potocznym przetłumaczmy na język algebry.

Powierzchnia pierwszego pastwiska wynosi $3\frac{1}{3}$ ha, więc w momencie rozpoczęcia wypasu 12 byków znajdowało się na nim $3\frac{1}{3}x$ porcji trawy. Od momentu rozpoczęcia

wypasu do chwili zjedzenia przez byki całej trawy z pierwszego pastwiska upłynęły 4 tygodnie, więc w tym czasie musiało tam wyrosnąć $4 \cdot 3\frac{1}{3}y$ świeżych porcji trawy (w ciągu jednego tygodnia na powierzchni $3\frac{1}{3}$ ha przybyło $3\frac{1}{3}y$ porcji, a w ciągu 4 tygodni wyrosło na tej samej powierzchni $4 \cdot 3\frac{1}{3}y$ porcji). Dodając porcje trawy, jakie znajdowały się na pierwszym pastwisku w momencie rozpoczynania wypasu, oraz te porcje, które wyrosły na nim w trakcie trwającego 4 tygodnie wypasu, otrzymujemy w sumie $3\frac{1}{3}x + 4 \cdot 3\frac{1}{3}y$ porcji trawy, które 12 byków zjadło w ciągu 4 tygodni.

Upraszczając to wyrażenie otrzymujemy

$$3\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3}y.$$

Ponieważ „porcja” to ilość trawy, jaką jeden byk zjada w tydzień, widzimy, że 12 byków w ciągu 4 tygodni musiało zjeść łącznie $12 \cdot 4 = 48$ porcji trawy, zatem wartość wyrażenia $3\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3}y$ wynosi 48.

Z kolei na drugim pastwisku o powierzchni 10 ha w chwili rozpoczęcia wypasu znajdowało się $10x$ porcji trawy. Ponieważ do momentu zjedzenia przez 21 byków całej trawy znajdującej się na drugim pastwisku upłynęło 9 tygodni, więc w ciągu tego czasu musiało tam wyrosnąć $9 \cdot 10y$ porcji trawy. Dodając te wielkości otrzymujemy w sumie $10x + 9 \cdot 10y$ porcji trawy, które 21 byków zjadło w ciągu 9 tygodni. Upraszczając to wyrażenie otrzymujemy

$$10x + 90y.$$

Ale 21 byków w ciągu 9 tygodni musiało zjeść łącznie $21 \cdot 9 = 189$ porcji trawy, zatem wartość wyrażenia $10x + 90y$ wynosi 189.

Żeby rozwiązać zadanie, musimy dowiedzieć się, dla jakich liczb wstawionych w miejsce niewiadomych x oraz y wartość wyrażenia $3\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3}y$ wynosi 48, a wyrażenia $10x + 90y$ równa się 189.

Problem ten przetłumaczony na język algebry przyjmuje postać układu równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3}y = 48 \\ 10x + 90y = 189. \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ metodą przeciwnych współczynników. Na początek przekształcimy pierwsze równanie tak, aby pozbyć się ułamków. W tym celu współczynniki przy niewiadomych będące liczbami mieszanymi (tzn. postaci liczba

Metoda przeciwnych współczynników

Została opisana w poprzednim numerze. Polega na pomnożeniu jednego lub obu równań przez takie liczby, żeby współczynniki przy jednej z niewiadomych były przeciwne. Wtedy po dodaniu równań stronami zmniejszy się liczba niewiadomych, np.

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 2x - 3y = -5 & / \cdot (-1) \\ 5x - 3y = 1 \end{cases} & \begin{cases} 2x - 3y = -5 & / \cdot (-5) \\ 5x - 3y = 1 \end{cases} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases} & \begin{cases} -10x + 15y = 25 \\ 10x - 6y = 2 \end{cases} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ 3x = 6 & 15y - 6y = 27 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ x = 2. & y = 3. \end{array}$$

Prima aprilis,
prima aprilis,
czytaj powoli,
bo się pomyliś.

Każde dwie liczby rzeczywiste są równe. Jak to możliwe? O tak:

Niech $a > b$.

Zatem dla pewnego $c > 0$

$$a = b + c \quad / \cdot (a - b)$$

$$a(a - b) = (b + c)(a - b)$$

$$aa - ab = ab + ac - bb - bc$$

$$aa - ab - ac = ab - bb - bc$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

$$a = b.$$

całkowita i ułamek właściwy) zamieniamy na ułamki niewłaściwe. Otrzymujemy równanie

$$\frac{10}{3}x + \frac{40}{3}y = 48.$$

Teraz aby pozbyć się ułamków, wystarczy obie strony pomnożyć przez 3. Otrzymujemy równanie

$$10x + 40y = 144.$$

Wstawiamy je do układu w miejsce pierwszego równania i otrzymujemy:

$$\begin{cases} 10x + 40y = 144 \\ 10x + 90y = 189. \end{cases}$$

Teraz pierwsze równanie mnożymy przez (-1) i dodajemy do drugiego.

$$(10x + 90y) - (10x + 40y) = 189 - 144.$$

Ponieważ w obu równaniach liczby stojące przy x były przeciwne, wyrazy te się zredukują i otrzymamy równanie z jedną niewiadomą: $50y = 45$, skąd $y = 0,9$.

Znaną wartość y wstawiamy do jednego z równań układu (np. do drugiego) i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą x : $10x + 90 \cdot 0,9 = 189$.

Rozwiązujemy je:

$$10x + 81 = 189$$

$$10x = 189 - 81$$

$$10x = 108$$

$$x = 10,8.$$

Zatem w momencie rozpoczęcia wypasu na powierzchni jednego hektara dowolnego z trzech pastwisk znajdowało się 10,8 porcji trawy, a w ciągu tygodnia na hektarze przyrasta 0,9 porcji.

Mimo że nie skończyliśmy jeszcze rozwiązywania zadania, przeprowadzimy teraz sprawdzenie otrzymanych dotychczas wyników. Obliczyliśmy, że 12 byków w ciągu 4 tygodni zjadło 48 porcji trawy. W ten sposób byki zjadły całą trawę znajdującą się na pierwszym pastwisku, czyli tyle porcji, ile było tam w momencie rozpoczęcia wypasu i jeszcze te, które wyrosły na nim w ciągu 4 tygodni wypasu. Obliczyliśmy, że na pastwisku o powierzchni $3\frac{1}{3}$ ha w chwili rozpoczęcia wypasu znajdowało się $3\frac{1}{3} \cdot 10,8 = 36$ porcji trawy, a w ciągu tygodnia wyrastały na nim $3\frac{1}{3} \cdot 0,9 = 3$ nowe porcje, co oznacza 12 porcji przyrostu w ciągu 4 tygodni. W takim razie całkowita liczba porcji zjedzonych na tym pastwisku w ciągu 4 tygodni rzeczywiście wynosi $36 + 12 = 48$. Na razie wszystko się zgadza.

Zajmijmy się drugim pastwiskiem, na którym 21 byków w ciągu 9 tygodni musiało zjeść łącznie 189 porcji trawy. Drugie pastwisko miało powierzchnię 10 ha, więc

w momencie rozpoczęcia wypasu znajdowało się na nim $10 \cdot 10,8 = 108$ porcji trawy, a w ciągu jednego tygodnia wyrastało na nim $10 \cdot 0,9 = 9$ nowych porcji, co oznacza, że w czasie 9 tygodni przybyło 81 porcji. W takim razie suma porcji, jakie były na drugim pastwisku na początku i jakie wyrosły na nim w ciągu 9 tygodni, wynosi rzeczywiście $108 + 81 = 189$.

Sprawdzenie potwierdziło poprawność tej części rozwiązania, która opierała się na układzie równań. Możemy teraz dokończyć rozwiązywanie zadania. Zajmijmy się więc trzecim pastwiskiem o powierzchni 24 ha. Pytanie brzmi: ile byków zje trawę na tym pastwisku w ciągu 18 tygodni? Oczywiście chodzi o zjedzenie całej trawy z trzeciego pastwiska. Skoro jego powierzchnia wynosi 24 ha, w chwili rozpoczęcia wypasu musiało być na nim $24 \cdot 10,8 = 259,2$ porcji trawy. W ciągu tygodnia wyrastało na nim $24 \cdot 0,9 = 21,6$ porcji, co oznacza, że w ciągu 18 tygodni przybyło na tym pastwisku aż 388,8 porcji. Wynika z tego, że łączna liczba porcji, jaką musiały zjeść byki pasące się na trzecim pastwisku, wynosi $259,2 + 388,8 = 648$. Jeżeli tę liczbę porcji podzielimy przez 18 tygodni, to dowiemy się, że na trzecim pastwisku pasło się 36 byków, i jest to odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu.

Pani Całka jest bardzo surową i wymagającą nauczycielką matematyki. Ma zawsze w zanadru trochę zadań tekstowych, które zadaje jako pracę domową, gdy klasa nieodpowiednio zachowuje się na lekcji. Uczniowie nie lubią tych zadań, bo trzeba je rozwiązywać za pomocą układów równań, co wymaga benedyktyńskiej wręcz cierpliwości. Samo znalezienie takiego układu nie jest zbyt trudne, lecz jego rozwiązanie wymaga znużających obliczeń.

Pewnego razu zachorowała inna matematyczka i pani Całka wzięła za nią zastępstwo. Nowa klasa nie знаła jej dyscyplinujących metod i zbyt łatwo dokazywała na lekcji. Skończyło się to karnym zadaniem, którego treść brzmiała tak:

2. Orzechy dziadka

Dziadek dał każdej ze swoich trzech wnuczek tyle orzechów, ile każda z nich ma lat. Następnie powiedział do Ani:

– Połowę wszystkich orzechów, które ci dałem, zatrzymaj dla siebie, a drugą połowę rozdziel równo między siostry.

Gdy Ania wykonała polecenie, dziadek rzekł do Agatki:

– Teraz ty zostaw sobie połowę orzechów – tych ode mnie i od Ani – a drugą połowę rozdziel sprawiedliwie między siostry.

Gdy Agatka skończyła, dziadek powiedział do Agnieszki:

– Ty również podziel orzechy w ten sposób. Połowę orzechów, jakie dostałaś ode mnie i od siostr, zatrzymaj, drugą połowę rozdziel równo między siostry.

W rezultacie tych podziałów każda z wnuczek stała się posiadaczką 8 orzechów.

Ile lat ma każda z dziewczynek?

Zadanie to rzeczywiście sprawiło uczniom wiele kłopotu. Tylko Marcin i Bartek je zrobili. Marcin to najlepszy matematyk w klasie, dużo czyta i jest nadzwyczaj pracowity. Ale Bartek? To znany klasowy leń. Za to sprytny. Zobaczcie, jak chłopcy rozwiązali to zadanie.

Rozwiązanie Marcina

Przez x oznaczmy liczbę lat Ani, przez y – Agatki, a przez z – Agnieszki. Każda z dziewczynek dostała od dziadka tyle orzechów, ile miała lat, zatem Ania dostała x orzechów, Agatka – y orzechów, a Agnieszka – z orzechów.

Ania połowę otrzymanych orzechów, czyli $\frac{1}{2}x$, zostawiła sobie, a drugą połowę podzieliła równo między siostry. Zatem Agatka i Agnieszka otrzymały od Ani po $\frac{1}{4}x$ orzechów. W takim razie po pierwszym podziale Ania miała $\frac{1}{2}x$ orzechów, Agatka $y + \frac{1}{4}x$ orzechów, a Agnieszka $z + \frac{1}{4}x$ orzechów. Zapiszmy to w tabelce.

Liczba orzechów	Ani	Agatki	Agnieszki
na początku	x	y	z
po I podziale	$\frac{1}{2}x$	$y + \frac{1}{4}x$	$z + \frac{1}{4}x$

Drugi podział polegał na tym, że Agatka połowę orzechów (tych od dziadka i od Ani) zostawiła sobie, a drugą połowę rozdzieliła sprawiedliwie między siostry. Zatem Agatka zostawiła sobie $\frac{1}{2}(y + \frac{1}{4}x)$ orzechów, natomiast Ani i Agnieszce dała po $\frac{1}{4}(y + \frac{1}{4}x)$ orzechów. Z tego wniosek, że po drugim podziale Agatka miała $\frac{1}{2}(y + \frac{1}{4}x)$ orzechów, natomiast Ania i Agnieszka miały odpowiednio po $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(y + \frac{1}{4}x)$ oraz $z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}(y + \frac{1}{4}x)$ orzechów. Redukując wyrazy podobne w tych wyrażeniach otrzymamy odpowiednio $\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y$, $\frac{9}{16}x + \frac{1}{4}y$ oraz $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z$.

Po drugim podziale nasza tabelka wygląda więc tak:

Liczba orzechów	Ani	Agatki	Agnieszki
na początku	x	y	z
po I podziale	$\frac{1}{2}x$	$y + \frac{1}{4}x$	$z + \frac{1}{4}x$
po II podziale	$\frac{9}{16}x + \frac{1}{4}y$	$\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y$	$\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z$

Trzeci podział polegał na tym, że Agnieszka połowę orzechów otrzymanych od dziadka i siostr zostawiła sobie, a resztę podzieliła równo między siostry. Zatem

Agnieszka zostawiła sobie $\frac{1}{2}(\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z)$ orzechów, natomiast Ani i Agatce dała po $\frac{1}{4}(\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z)$ orzechów. Wynika z tego, że po trzecim podziale Agnieszka miała $\frac{1}{2}(\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z)$ orzechów, natomiast Ania i Agatka miały odpowiednio po $\frac{9}{16}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}(\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z)$ oraz $\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}(\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z)$ orzechów. Redukując wyrazy podobne w tych wyrażeniach otrzymujemy $\frac{5}{32}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{2}z$, $\frac{41}{64}x + \frac{5}{16}y + \frac{1}{4}z$ oraz $\frac{13}{64}x + \frac{9}{16}y + \frac{1}{4}z$, co wpisujemy do tabelki.

Liczba orzechów	Ani	Agatki	Agnieszki
na początku	x	y	z
po I podziale	$\frac{1}{2}x$	$y + \frac{1}{4}x$	$z + \frac{1}{4}x$
po II podziale	$\frac{9}{16}x + \frac{1}{4}y$	$\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}y$	$\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}y + z$
po III podziale	$\frac{41}{64}x + \frac{5}{16}y + \frac{1}{4}z$	$\frac{13}{64}x + \frac{9}{16}y + \frac{1}{4}z$	$\frac{5}{32}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{2}z$

Z tekstu zadania wiemy, że po ostatnim podziale dziewczynki miały po 8 orzechów. Ten warunek pozwala zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{41}{64}x + \frac{5}{16}y + \frac{1}{4}z = 8 \\ \frac{13}{64}x + \frac{9}{16}y + \frac{1}{4}z = 8 \\ \frac{5}{32}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{2}z = 8. \end{cases}$$

Teraz Marcinowi przydała się metoda, o której niedawno czytał, zwana **metodą pomocniczych niewiadomych**. Oczywiście ten układ równań można rozwiązać i bez niej, ale wymaga to żmudnych obliczeń. Sprawne rozwiązywanie układów równań zależy od doświadczenia rozwiązującego. Na początku zawsze dobrze jest przyrzeć się uważnie układowi. Czasem można zauważyć coś, co bardzo ułatwi rozwiązanie. Tak właśnie zrobił Marcin. Zauważył, że łatwo doprowadzić do tego, by w każdym równaniu w wyrazie zawierającym tę samą niewiadomą występował taki sam mianownik. W tym celu każdy z ułamków w ostatnim równaniu rozszerzył mnożąc licznik i mianownik przez 2. Układ przybrał taką postać:

$$\begin{cases} \frac{41}{64}x + \frac{5}{16}y + \frac{1}{4}z = 8 \\ \frac{13}{64}x + \frac{9}{16}y + \frac{1}{4}z = 8 \\ \frac{10}{64}x + \frac{2}{16}y + \frac{2}{4}z = 8. \end{cases}$$

Prima aprilis,
prima aprilis,
czytaj powoli,
bo się pomyliśz

Czy to możliwe, żeby pole koła wynosiło $2\pi r$? A obwód πr^2 ?

To oczywiście poprawne przekształcenie, ale po co Marcin to zrobił? Za chwilę wszystko się wyjaśni. Tymczasem Marcin trochę inaczej zapisał każde z równań i wprowadził nowe niewiadome, o tak:

$$\begin{cases} 41 \cdot \frac{x}{64} + 5 \cdot \frac{y}{16} + \frac{z}{4} = 8 \\ 13 \cdot \frac{x}{64} + 9 \cdot \frac{y}{16} + \frac{z}{4} = 8 \\ 10 \cdot \frac{x}{64} + 2 \cdot \frac{y}{16} + 2 \cdot \frac{z}{4} = 8. \end{cases}$$

Wyrażenie $\frac{1}{64}x$ oznaczył przez h , $\frac{1}{16}y$ – przez m , a $\frac{1}{4}z$ – przez t . Dzięki temu otrzymał prostszy w zapisie i łatwiejszy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} 41h + 5m + t = 8 \\ 13h + 9m + t = 8 \\ 10h + 2m + 2t = 8. \end{cases}$$

Potem Marcin zastosował **metodę podstawiania**. Wybrał jedno równanie układu (konkretnie drugie) i wyznaczył z niego niewiadomą t w zależności od pozostałych niewiadomych

$$t = 8 - 13h - 9m.$$

Tak otrzymane wyrażenie wstawił w miejsce t do dwóch pozostałych równań. W rezultacie powstał zwykły układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 41h + 5m + (8 - 13h - 9m) = 8 \\ 10h + 2m + 2(8 - 13h - 9m) = 8. \end{cases}$$

Potem Marcin zredukował wyrazy podobne i w końcu układ równań wyglądał tak

$$\begin{cases} 28h - 4m = 0 \\ -16h - 16m = -8. \end{cases}$$

Dzieląc pierwsze równanie przez 4, a drugie przez (-8) , Marcin otrzymał układ

$$\begin{cases} 7h - m = 0 \\ 2h + 2m = 1, \end{cases}$$

który rozwiązał tak: z pierwszego równania wyznaczył niewiadomą m w zależności od h

$$m = 7h,$$

wyrażenie to wstawił w miejsce m do drugiego równania i otrzymał równanie z jedną niewiadomą h

$$2h + 2 \cdot 7h = 1.$$

Metoda podstawiania

Została opisana w poprzednim numerze. Polega na wycieszeniu jednej ze zmiennych za pomocą drugiej z jednego równania i zastąpieniu jej otrzymanym wyrażeniem w drugim równaniu, np.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + 6y = 7 \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x = 7 - 6y \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} 3(7 - 6y) + 2y = 5 \\ x = 7 - 6y \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} 21 - 16y = 5 \\ x = 7 - 6y \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

Rozwiązał je z łatwością:

$$2h + 14h = 1$$

$$16h = 1$$

$$h = \frac{1}{16}.$$

Potem wstawiając do równania $7h - m = 0$ w miejsce h liczbę $\frac{1}{16}$ obliczył: $m = 7h = 7 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$. Znając wartości h i m Marcin obliczył

$$\begin{aligned} t &= 8 - 13h - 9m = \\ &= 8 - 13 \cdot \frac{1}{16} - 9 \cdot \frac{7}{16} = \\ &= 8 - \frac{13}{16} - \frac{63}{16} = \\ &= 8 - \frac{76}{16} = \\ &= \frac{32}{4} - \frac{19}{4} = \\ &= \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } h = \frac{1}{16}, m = \frac{7}{16}, t = \frac{13}{4}.$$

Ponieważ h oznaczało $\frac{1}{64}x$, m oznaczało $\frac{1}{16}y$, a t oznaczało $\frac{1}{4}z$, mamy:

$$\frac{1}{64}x = \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16}y = \frac{7}{16}, \quad \text{a} \quad \frac{1}{4}z = \frac{13}{4}.$$

Otrzymaliśmy trzy proste równania, każde z jedną niewiadomą. Rozwiązując je znajdujemy $x = 4$, $y = 7$ i $z = 13$.

Widać, że zastosowanie metody pomocniczych niewiadomych pozwoliło nam uniknąć zbędnych rachunków na dużych liczbach. Powinniśmy jeszcze wykonać sprawdzenie, jednak zamiast tego rozwiążemy to zadanie innym sposobem – nie algebraicznym, lecz arytmetycznym, bez korzystania z układów równań – a potem porównamy wyniki. Zastosujemy **metodę analizy starożytnych** polegającą na rozwiązywaniu zadania od końca (już w starożytności i średniowieczu była ona stosowana przez Hindusów). Na taki pomysł wpadł też Bartek.

Rozwiązanie Bartka

Z tekstu zadania wiemy, że po trzecim podziale każda z dziewczynek miała po 8 orzechów. Teraz chcemy dowiedzieć się, ile orzechów miały po drugim podziale. Trzeci podział polegał na tym, że Agnieszka połowę orzechów, jakie miała po drugim podziale, zostawiła sobie, a drugą połowę rozdzieliła równo pomiędzy siostry. Ponieważ po trzecim podziale Agnieszka miała 8 orzechów, więc tą połowę orzechów pozostawioną sobie jest właśnie 8 sztuk. Z tego wynika, że bezpośrednio przed trzecim podziałem Agnieszka musiała mieć dwa razy więcej orzechów, czyli 16. Spośród tych 16 orzechów połowę, czyli 8, zostawiła sobie, a pozostałe 8 orzechów rozdzieliła równo, czyli po 4 sztuki, między siostry. Zatem w wyniku trzeciego podziału liczba orzechów Ani i Agatki (każdej z osobną) wzrosła o 4. Z tego wniosek,

Prima aprilis, prima aprilis,
czytaj powoli, bo się pomylił

Trzech przyjaciół postanowiło uregulować w równych częściach koszt zjedzonej wspólnie kolacji. Rachunek wyniósł 60 zł, więc każdy z nich zapłacił po 20 zł. Przy wkładaniu pieniędzy do kasy kelner stwierdził, że koszt kolacji wyniósł tylko 50 zł. Wziął więc 10 zł reszty z kasy, schował do kieszeni 4 zł, a po 2 zł oddał każdemu z trzech przyjaciół. W ten sposób każdy z nich zapłacił po 18 zł, więc w sumie zapłacili 54 zł. Ale przecież kelner wziął dla siebie tylko 4 złote, co daje 58 zł. Co stało się z pozostałymi 2 zł?

Liczba orzechów	Ani	Agatki	Agnieszki
po III podziale	8	8	8
po II podziale	4	4	16

Teraz obliczymy, ile orzechów miała każda z dziewczynek przed drugim podziałem. Drugi podział polegał na tym, że Agatka połowę orzechów, jakie miała po pierwszym podziale, zostawiła sobie, a drugą połowę rozdzieliła równo między siostry. Z tabelki widać, że po drugim podziale Agatka miała 4 orzechy. To one właśnie stanowiły tę połowę orzechów, które Agatka zostawiła sobie w rezultacie drugiego podziału. Zatem bezpośrednio przed drugim podziałem musiała mieć dwa razy więcej orzechów, czyli 8. Spośród tych 8 sztuk połowę, czyli 4, zostawiła sobie, a pozostałe 4 rozdzieliła równo, czyli po 2 sztuki, między siostry. Zatem w wyniku drugiego podziału liczba orzechów Ani i Agnieszki (każdej z osobna) wzrosła o 2. Z tego wniosek, że przed drugim podziałem Ania i Agnieszka miały po 2 orzechy mniej niż po nim. Po drugim podziale Ania miała 4 orzechy, a Agnieszka 16, więc przed nim Ania musiała mieć $4 - 2 = 2$ orzechy, a Agnieszka $16 - 2 = 14$ orzechów. Przedstawia to tabelka:

Liczba orzechów	Ani	Agatki	Agnieszki
po III podziale	8	8	8
po II podziale	4	4	16
po I podziale	2	8	14

bie w rezultacie pierwszego podziału. Zatem przed pierwszym podziałem musiała mieć dwa razy więcej orzechów, czyli 4. Spośród nich połowę (2 sztuki) zostawiła sobie, a pozostałe 2 orzechy rozdzieliła po równo, czyli po 1, między

Liczba orzechów	Ani	Agatki	Agnieszki
po III podziale	8	8	8
po II podziale	4	4	16
po I podziale	2	8	14
na początku	4	7	13

Widać, że rozwiązanie sposobem arytmetycznym potwierdziło wcześniejsze rozwiązanie metodą algebraiczną. Zatem Ania ma 4 lata, Agatka 7, a Agnieszka 13.

że przed trzecim podziałem Ania i Agatka miały po 4 orzechy mniej niż po nim. Ponieważ po trzecim podziale miały po 8 orzechów, zatem przed nim musiały mieć po $8 - 4 = 4$ orzechy. Możemy to zapisać w tabelce, którą wypełniamy teraz „od tyłu”.

Teraz obliczmy, ile orzechów miała każda z dziewczynek na początku. Pierwszy podział polegał na tym, że Ania połowę orzechów otrzymanych od dziadka zostawiła sobie, a drugą połowę rozdzieliła równo między siostry. Z tabelki widać, że po pierwszym podziale Ania miała 2 orzechy. To one właśnie stanowiły tę połowę, którą Ania zostawiła sobie w rezultacie pierwszego podziału. Zatem w wyniku pierwszego podziału liczba orzechów Agatki i Agnieszki (każdej z osobna) wzrosła o 1. Wynika z tego, że na samym początku Agatka i Agnieszka miały po 1 orzechu mniej niż po pierwszym podziale. Po pierwszym podziale Agatka miała 8 orzechów, a Agnieszka 14, zatem na samym początku Agatka musiała mieć $8 - 1 = 7$ orzechów, a Agnieszka $14 - 1 = 13$ orzechów.

Zadania do samodzielnego rozwiązania do artykułu Mocna reszta

1. Czy istnieją liczby całkowite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , takie że zachodzi równość $x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_3^2 - 16x_4^2 = 1003 - x_5^2$?
 2. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o bokach całkowitych, długość przynajmniej jednej przyprostokątnej musi być wielokrotnością trójki.
- Wskazówka: zbadaj, jaką resztę dają kwadraty liczb całkowitych z dzielenia przez 3.

Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi $ax + by = c$ (gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$) ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jednak tylko niektóre z tych rozwiązań mogą być liczbami naturalnymi. Umiejętność znajdowania takich rozwiązań jest bardzo stara, liczy około dwóch tysięcy lat. Nie wiadomo, kto po raz pierwszy takie zagadnienie rozwiązał. Wiemy, że metody rozwiązywania tego rodzaju równań opracowano na Dalekim Wschodzie: w Indiach i Chinach. Piszę „metody”, bo w Indiach rozwiązywano je całkiem inaczej niż w Chinach i z całą pewnością Hindusi i Chińczycy wypracowali swoje metody niezależnie. Dziś takie równania nazywamy diofantycznymi, od nazwiska greckiego matematyka Diofantosa, który się nimi zajmował. Zagadnienie to zilustrujemy pewną starą legendą hinduską.

3. Legenda hinduska

Kiedy Aleksander Wielki ze swoimi wojskami stanął na zachodnich krańcach Indii, założył tam garnizony mające służyć mu jako bazy wypadowe do dalszych podbojów. Legenda głosi, że grasowała w tym regionie niezwykle groźna bestia o dwustu głowach. Władający krainą maharadża zaczął szukać ochotników, którzy odważyliby się stawić jej czoło. Nie było to proste. Aby bestię zabić, trzeba było obciąć jej wszystkie głowy. Maharadża miał dwa czarodziejskie miecze, które jako jedyne były w stanie ugodzić potwora. Miały one jednak pewną wadę: jeden z nich za każdym cięciem obcinał dokładnie 7 głów, a drugi 17. Gdy po kilku cięciach bestii zostawało mniej niż 7 głów, oba miecze stawały się bezużyteczne, a potwór rozszarpał śmiałka, który chciał go zgładzić. W ciągu trzech dni potworowi odrastały wszystkie ścięte głowy i trzeba było zaczynać walkę od początku. Nic dziwnego, że wkrótce zabrakło chętnych do zmierzenia się z maszkara. Maharadża ogłosił, że pogromcy potwora odda rękę swojej jedynej córki. Ponieważ młoda księżniczka była znana z urody i dobrego charakteru, zaczęli pojawiać się śmiałkowie gotowi zabić potwora i zdobyć nagrodę. Pierwszy z nich obrał następującą taktykę: najpierw mieczem ścinającym po 17 głów zadał tyle ciosów, aż potworowi zostało mniej niż 17 głów. Wtedy użył miecza ścinającego po 7 głów, zadając nim możliwie najwięcej ciosów. Niestety, jego taktyka zawiodła. Łatwo obliczyć, że potworowi zostało 6 głów. Drugi śmiałek zastosował inną metodę. Użył jedynie miecza ścinającego jednym cięciem 7 głów i wykonał nim możliwie najwięcej cięć. Potworowi zostały w końcu 4 głowy, co dla bohatera skończyło się tragicznie. Inni śmiałkowie stosowali najróżniejsze kombinacje cięć obydwoma mieczami, lecz żadnemu nie udało się obciąć bestii wszystkich głów. Zapanowało powszechne zwątpienie, czy jest to w ogóle możliwe. Pewnego dnia pojawił się w pałacu maharadży młodzieniec o jasnej skórze. „Ja zabiję potwora” – powiedział, a wszyscy dworzanie zdumieni się tym bardziej, że nigdy dotąd nie widzieli białego człowieka. Wyjaśniło się wkrótce, że młodzian należał do armii Aleksandra Wielkiego i przybył z Europy. Córka maharadży, która poczuła sympatię do młodzieńca, prosiła ojca, by nie wysyłał go na pewną śmierć, ten był jednak nieubłagany. Macedończyk wziął czarodziejskie miecze i ruszył do pieczary potwora. Wszyscy byli pewni, że widzą go po raz ostatni. Jakież było ich zdumienie, gdy przed zachodem słońca wrócił zdrów i cały oznajmiając, że bestia nie żyje. Maharadża dotrzymał słowa. Wkrótce odbył się ślub macedońskiego bohatera i indyjskiej księżniczki. Czy potrafisz powiedzieć, ile cięć wykonał Macedończyk mieczem ścinającym jednocześnie 17 głów, a ile mieczem ścinającym jednocześnie 7 głów?

Rozwiązanie

Liczby cięć wykonanych mieczami ścinającymi jednocześnie 17 głów i 7 głów oznaczamy odpowiednio przez x oraz y . Zatem dokonując pierwszym z tych mieczy x cięć, a drugim y cięć Macedończyk obciął potworowi odpowiednio $17x$ głów oraz $7y$ głów. Daje to w sumie liczbę $17x + 7y$ obciętych głów, a ponieważ były to wszystkie głowy potwora, wartość tego wyrażenia musi wynosić 200. Zapisujemy to w postaci równania

$$17x + 7y = 200.$$

Oczywiście takie równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wystarczy w miejsce jednej z niewiadomych wstawić dowolną liczbę i wyliczyć drugą niewiadomą. Otrzymalibyśmy w ten sposób parę liczb spełniających wyjściowe równanie. Takich par można utworzyć nieskończenie wiele. Jednak nasze równanie należy rozwiązać w liczbach naturalnych (bo przecież liczby zadanych ciosów muszą być całkowite nieujemne). Wcześniej opisane postępowanie nie jest teraz rozsądne. Podstawiając za x jakąś liczbę całkowitą na ogół otrzymujemy y , które jest ułamkiem. Na przykład gdy w miejsce niewiadomej x wstawimy do równania 8, otrzymamy równanie z jedną niewiadomą: $17 \cdot 8 + 7y = 200$, skąd łatwo znajdziemy, że $y = 9\frac{1}{7}$. Jak widać, nie otrzymaliśmy liczby całkowitej.

Wiadomo jednak, że równanie postaci $ax + by = c$, w którym a i b są liczbami względnie pierwszymi, ma zawsze rozwiązanie w liczbach całkowitych. Istnieje też nietrudny algorytm, który pozwala znajdować całkowite rozwiązania podobnych równań. Użyjemy go do rozwiązania równania $17x + 7y = 200$, bowiem 17 i 7 to właśnie liczby względnie pierwsze. Proces rozwiązywania będzie się składał z powtarzających się kroków.

Krok 1

Z równania $17x + 7y = 200$ wyznaczamy tę niewiadomą, przy której współczynnik jest mniejszy – w naszym przypadku jest to niewiadoma y . Otrzymujemy $7y = 200 - 17x$, skąd $y = \frac{200 - 17x}{7}$. Tę równość zapiszemy teraz trochę inaczej:

$$y = \frac{200 - 17x}{7} = \frac{200}{7} - \frac{17}{7}x = 28\frac{4}{7} - 2\frac{3}{7}x = \left(28 + \frac{4}{7}\right) - \left(2 + \frac{3}{7}\right)x =$$

$$= \left(28 + \frac{4}{7}\right) - \left(2x + \frac{3}{7}x\right) = 28 + \frac{4}{7} - 2x - \frac{3}{7}x = 28 - 2x + \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x = 28 - 2x + \frac{4 - 3x}{7}.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy $y = 28 - 2x + \frac{4 - 3x}{7}$.

Ponieważ x i y to liczby całkowite, wartość wyrażenia $\frac{4 - 3x}{7}$ też musi być liczbą całkowitą (bo po dodaniu do niej dwóch liczb całkowitych 28 i $-2x$ musi dać całkowity wynik). Liczbę całkowitą $\frac{4 - 3x}{7}$ oznaczmy przez t . Wobec tego nasze równanie przyjmuje postać: $y = 28 - 2x + t$. My jednak zajmiemy się teraz równością $t = \frac{4 - 3x}{7}$, którą przekształcamy do postaci $7t + 3x = 4$.

Jest to znowu równanie z dwoma niewiadomymi, ale ma ono mniejsze współczynniki przy niewiadomych niż równanie wyjściowe. Poprzednio współczynniki przy niewiadomych wynosiły 17 i 7, a teraz wynoszą 7 i 3 (nadal są to liczby względnie pierwsze).

Teraz będziemy znowu stosowali tę samą procedurę i zmniejszali współczynniki kolejno otrzymywanych równań (a raczej zmniejszali ich wartość bezwzględną). Nie da się tego powtarzać w nieskończoność. W końcu musimy dostać równanie, gdzie jeden ze współczynników będzie wynosił 1 lub -1 .

Krok 2

Krok 1 zakończył się równaniem $7t + 3x = 4$. Ponownie wyznaczamy z niego tę niewiadomą, przy której współczynnik jest mniejszy, czyli niewiadomą x .

Mamy $x = \frac{4 - 7t}{3}$ i przekształcamy to wyrażenie podobnie jak w kroku 1:

$$x = \frac{4 - 7t}{3} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}t = 1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3}t = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(2 + \frac{1}{3}\right)t = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(2t + \frac{1}{3}t\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - 2t - \frac{1}{3}t = 1 - 2t + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t = 1 - 2t + \frac{1 - t}{3}.$$

Zatem $x = 1 - 2t + \frac{1 - t}{3}$.

Ponieważ x oraz t są liczbami całkowitymi, powyższa równość może zachodzić tylko wtedy, gdy $\frac{1 - t}{3}$ jest także liczbą całkowitą. Oznaczmy ją przez t_1 . Równanie

$$x = 1 - 2t + \frac{1 - t}{3} \text{ przyjmuje więc postać } x = 1 - 2t + t_1.$$

Dalej zajmujemy się równością $t_1 = \frac{1 - t}{3}$. Przekształcamy ją do postaci: $3t_1 + t = 1$.

I to już jest koniec, bo współczynnik przy niewiadomej t wynosi 1. Proces powtarzania kolejnych kroków został zakończony. Wystarczyły do tego 2 kroki, ale dla innych wyjściowych równań często trzeba wykonać ich więcej.

Zakończenie

Teraz z równania $3t_1 + t = 1$, wyznaczamy niewiadomą t (przy której współczynnik wynosi 1): $t = 1 - 3t_1$.

Przepiszmy teraz równości, które „po drodze” zostały ujęte w ramki:

$$y = 28 - 2x + t,$$

$$x = 1 - 2t + t_1,$$

$$t = 1 - 3t_1.$$

Do drugiej z nich w miejsce niewiadomej t wstawiamy wyrażenie $1 - 3t_1$ i upraszczamy zapis (otwieramy nawiasy i redukujemy wyrazy podobne):

$$x = 1 - 2(1 - 3t_1) + t_1 = 1 - 2 + 6t_1 + t_1 = 7t_1 - 1.$$

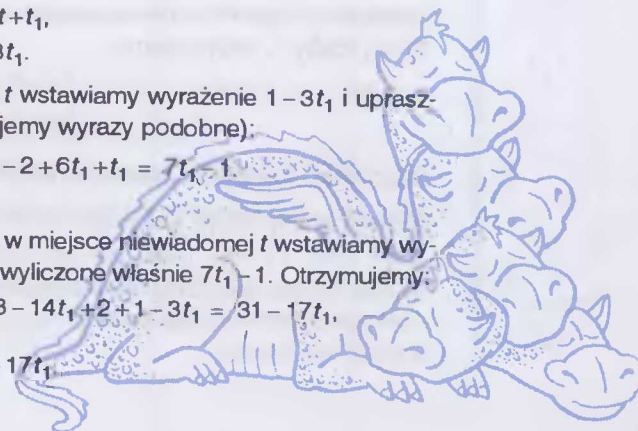
Zatem $x = 7t_1 - 1$.

Teraz do pierwszej z wypisanych równości w miejsce niewiadomej t wstawiamy wyrażenie $1 - 3t_1$, a w miejsce niewiadomej x wyliczone właśnie $7t_1 - 1$. Otrzymujemy:

$$y = 28 - 2(7t_1 - 1) + (1 - 3t_1) = 28 - 14t_1 + 2 + 1 - 3t_1 = 31 - 17t_1,$$

a stąd

$$y = 31 - 17t_1$$



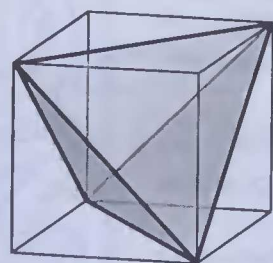
Stella octangula

Zapraszam w podróż po krainie wielościanów. Można wybrać podróż wirtualną – w internecie jest wiele stron poświęconych wielościanom, począwszy od najprostszych aż do takich, których widok przyprawia o zawrót głowy, jednak oglądanie bryłek na ekranie podobne jest do lizania cukierka przez szybę. Aby poczuć smak prawdziwej przygody, trzeba wyruszyć w podróż rzeczywistą. Własnoręcznie wykonany model „ożywa” i dzięki temu znacznie łatwiej można dostrzec piękno i matematyczne własności bryły. Dlatego gorąco zachęcam do samodzielnego wykonania modeli przynajmniej

niektórych z prezentowanych w tym kąciku brył. Nie wymaga to specjalnych umiejętności, ale aby efekt był zadowalający, niezbędna jest pewna doza cierpliwości i staranności. Należy jednak pamiętać, że pewne niedokładności są nie do uniknięcia – model zawsze jest tylko modelem. Wybitny matematyk i astronom Johannes Kepler (1571–1630) pisał: „Bez wątpienia – prawdziwa tych kształtów forma istnieje wiekiście w umyśle Boga-Stwórcy”.

Zabawę zaczynamy od przygotowania szablonu. Pod zamieszczoną w numerze siatkę należy podłożyć sztywną tekturkę, a następnie używając szpikulca nakłuć siatkę we wszystkich wierzchołkach. W ten sposób przeniesiemy rysunek na tekturkę. Miejsca po nakłuciach zaznaczamy ołówkiem i łączymy zgodnie z oryginalnym rysunkiem. Przy pierwszych próbach lub w przypadku bardziej skomplikowanej siatki przed nakłuwaniem dobrze jest spiąć tekturkę i stronę z siatką. Gotowy szablon będziemy mogli wykorzystać wielokrotnie. Przykładamy go do kartonu, z którego wykonujemy model, i w podobny sposób nakłuwamy karton. Pod spód warto podłożyć jakąś podkładkę dla ochrony stołu (może być kilka gazet). Punkty nakłute na kartonie łączymy „od linijki” nożykiem do tapet, delikatnie nacinając przy tym karton. Należy uważać, by papier nie uległ przecięciu. Nacięty karton będzie „pamiętał”, jak ma być zagięty, i dzięki temu po wycięciu siatki bez trudu pozaginamy ją wzdłuż żądanych linii. Później pozostaje tylko sklejenie jej elementów i połączenie wszystkiego w jedną całość.

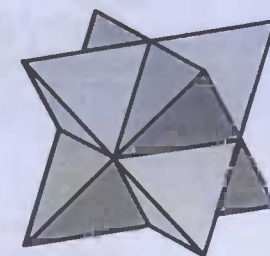
Naszą podróż w świat wielościanów rozpoczniemy od spojrzenia na znany wszystkim sześcian. Ma on 6 ścian, 12 krawędzi i 8 wierzchołków. Uważne oko dostrzega jednak, że można wybrać 4 jego wierzchołki w ten sposób, że będą one wierzchołkami najprostszego z ostrosłupów – czworościanu foremnego (rys. 1).



Rys. 1

Do wykonywania modeli nadaje się np. papier kserograficzny o wadze 160 g lub inny w miarę sztywny karton (lepiej jednak, by jego gramatura nie przekraczała 220 g). Prócz kartonu potrzebna będzie jeszcze tekturka (do wykonania szablonu), linijka (najlepiej metalowa), nożyczki, szpikulec i klej. Do wykonania najprostszych modeli wystarczy zwykły klej biurowy, ale lepiej zaopatrzyć się w szybkoschnący klej do puzzli, drewna itp. Kleje typu „super glue” nie nadają się do naszych celów – łatwiej skleić nimi palce niż model.

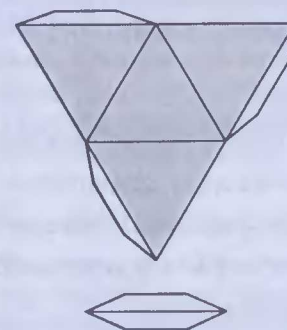
A co z pozostałymi czterema? One także wyznaczają czworościan foremny, więc w sześcianie mieszczą się dwa takie przenikające się czworościany (rys. 2). Kompozycja ta nazywana jest często *stella octangula* (gwiazda ośmioramienna). Taką nazwę nadał jej Kepler. Nie on jednakże był jej pierwszym odkrywcą. Sto lat wcześniej opisał ją Luca Pacioli w swoim dziele *De divina proportion* (1509). Nazwał on ten układ *octaedron elevatus* (ośmiościan powiększony).



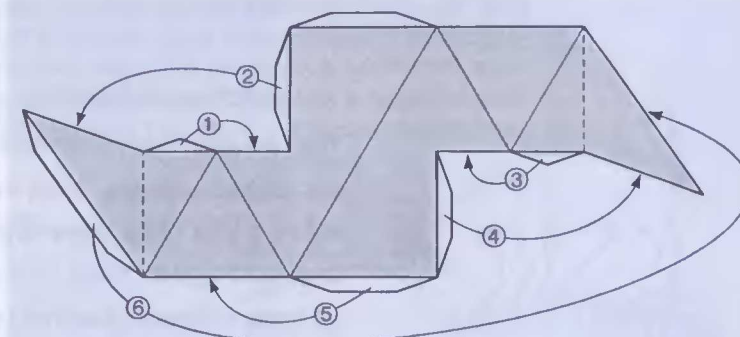
Rys. 2

Wykonanie modelu stelli octanguli jest proste. Wystarczy skleić 8 czworościanów foremnych (po 4 w dwóch kolorach) i połączyć je za pomocą „podwójnych skrzydełek”. Siatkę czworościanu i skrzydełek przedstawia rys. 3. Czworościany przyklejamy po jednym z każdej strony skrzydełka w ten sposób, aby elementy tego samego koloru nie miały wspólnych krawędzi.

Stella octangula może być także obiektem ciekawej łamigłówki przestrzennej. Wymyślił ją kilkanaście lat temu Jan Baranowski z Warszawy. Dzięki jego uprzejmości mamy możliwość zaprezentowania jej Czytelnikom MMM. Układanka składa się z 4 identycznych klocków – po dwa w dwóch kolorach. Siatkę pojedynczego elementu przedstawia rys. 4. Przerwane linie oznaczają krawędź wklęsłą (po jej zagięciu nie powstaje „grzbiet”, tylko „dolinka”), a ponieważ karton ma być zagięty



Rys. 3



Rys. 4

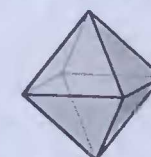
w przeciwną stronę, nacięcie nożykiem powinno być dokonane od spodu kartki. Numery i strzałki na skrzydełkach i krawędziach informują o sposobie i kolejności sklejania. Z pozoru proste zadanie – ułożenie z tych czterech klocków *stelli octanguli* – okazuje się trudniejsze, niż na początku wygląda. Tym większa jednakże jest satysfakcja, gdy uda się ten problem samodzielnie rozwiązać. Miłej zabawy.

Piotr Pawlikowski

Zadanie dla Czytelników

Jaki jest związek *stelli octanguli* – ośmiościanu powiększonego – z ośmiościanem foremnym?

Wśród osób, które do końca czerwca przysłały do redakcji poprawne rozwiązanie rozlosujemy nagrody książkowe.



Rys. 5

Zadania konkursowe

Wyniki konkursu z numeru 1/2002 pokazują, że proponowane przez nas łamigłówki nie okazały się łatwe. Nie powinniście się jednak przejmować, nawet jeśli nie potraficie rozwiązać ani jednego zadania (choć mają one bardzo zróżnicowany stopień trudności, więc warto próbować). Łamigłówki to zadania nietypowe, rzadko pojawiają się w szkole. Mają z nimi problemy nawet zawodowi matematycy. Trzeba nabrać trochę doświadczenia w rozwiązywaniu takich zadań. Na pewno pomoże Wam w tym nasz „Samouczek zadaniowy”. Do zadań konkursowych, które sprawią Czytelnikom najwięcej kłopotów, będziemy podawali nie tylko odpowiedzi, ale pełne lub częściowe rozwiązania. Proponujemy ponowne przesłanie tych zadań na podstawie podanych wskazówek. W kolejnych numerach będziemy wracali do zadań podobnych typów. Zobaczycie, że z numeru na numer będzie Wam szło coraz lepiej, czego wszystkim serdecznie życzymy.

Redakcja

1. Kozy na pastwiskach



Trzy pastwiska pokryte są trawą o jednakowej gęstości i jednakowo szybko rosnącą. Mają one następujące powierzchnie: $5\frac{5}{6}$ ha, $2\frac{6}{7}$ ha i 8 ha. Trawę na pierwszym pastwisku 70 kóz zjadło w ciągu 12 tygodni, trawę na drugim – 30 kóz w 14 tygodni. Ile kóz zje trawę na trzecim pastwisku w ciągu 21 tygodni?

2. Zakochani

Czterech chłopców: Anatol, Barnaba, Cezary i Damian i cztery dziewczyny: Eulalia, Franciszka, Genowefa i Henryka są zakochani w jednej z pozostałych osób, ale (rzecz przykra) uczucia żadnego z nich nie są odwzajemnione. Jeszcze gorzej byłoby, gdyby dwóch chłopców zakochanych było w jednej dziewczynie, a wprost tragicznie, gdyby dwie dziewczyny kochały się w jednym chłopcu. Ale aż tak źle nie jest. Wiadomo że:

- Barnaba nie jest kochany przez Franciszkę,
 - Cezary kocha dziewczynę zakochaną w Damianie,
 - ukochany Eulalii nie kocha Franciszki,
 - Anatol kocha dziewczynę, która kocha chłopca zakochanego w Henryce,
 - w Genowefie kocha się chłopiec, który jest kochany przez ukochaną Barnaby.
- Kto kocha Genowefę, a kto Barnabę?

3. Zakupy do biblioteki

Za 230 zł do biblioteki szkolnej została zakupiona pewna liczba egzemplarzy *W pustyni i w puszczy* Henryka Sienkiewicza oraz *Robinsona Crusoe* Daniela Defoe. Ile egzemplarzy każdej z książek kupiono, jeśli egzemplarz *W pustyni i w puszczy* kosztował 15 zł, a *Robinsona Crusoe* 11 zł?

4. Konspiratorzy

Przybyli po kryjomu, wszyscy ubrani na czarno. Zachowywali się tajemniczo: każdy uściśnął rękę trzem innym, z wyjątkiem jednego, który uściśnął rękę tylko jednej osoby. Nie wiadomo, ilu ich było, ale na pewno zbyt mało, żeby utworzyli drużynę piłki nożnej. Ilu ich mogło być?

5. Misja 2002 agenta 002

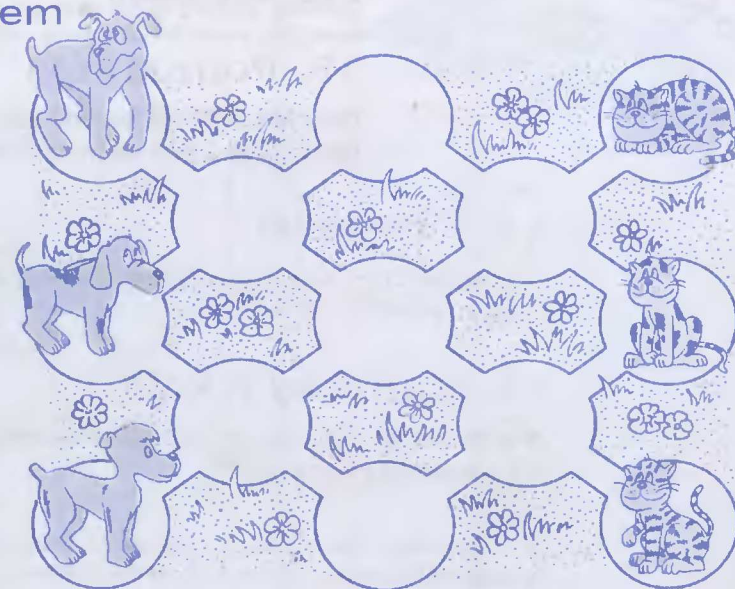
Agencje 002! W naszych kodach dozwolone są teraz jedynie cyfry 0 i 2. Zamiast pisać 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... będziecie teraz pisać 0, 2, 20, 22, 200, 2002, 220, 222, 2000, ... Jak zapiszecie w ten sposób rok 2002?

6. Na linowym moście

Nad przepaścią przerzucony jest most linowy. Jest uszkodzony, dlatego jednocześnie mogą być na nim najwyżej dwie osoby. Jest ciemno, więc trzeba się po nim poruszać z latarką. Na jednym skraju przepaści stanęło czterech towarzyszy. Mają tylko jedną latarkę. Jednemu z nich przeprawa przez most zabiera 10 minut, drugiemu 5, trzeciemu 2, a czwartemu tylko minutę. W jaki sposób powinni się przeprawiać, żeby zajęło im to w sumie jak najmniej czasu? Panowie nie są zbyt sprawni fizycznie i każdemu wzięcie któregośkolwiek z kolegów „na barana” opóźni czas przejścia dziesięciokrotnie.

7. Jak pies z kotem

Trzy mądre psy i trzy chytre koty rozsiadły się na przeciwległych placzkach skweru i zajęły rozwiązywaniem bardzo ważnego problemu: jak mają zamienić się miejscami, tak by nie zbliżać się do siebie? Kot z psem nie tylko nie mogą się spotkać, ale nawet znaleźć na sąsiednich placzkach. Jeśli za jeden ruch uznać przejście kota lub psa wzdłuż alejki na sąsiedni placzyk, to ilu ruchów potrzeba, aby psy i koty zamieniły się miejscami?



8. Tajemnicze słowo

Wykreśl osiem liter tak, aby pozostałe litery utworzyły jedno słowo.

O J S E I D E N M O L S I Ł T O E W R O

9. Fałszywe monety

Mamy pięć monet, wśród których dwie są fałszywe (obie cięższe lub lżejsze jednocześnie). Jaka minimalna liczba ważeń na wadze szalkowej pozwoli wykryć te monety?



10. Okrągły stół

Przy okrągłym stole mają się spotkać delegacje pięciu krajów. Będzie tam dwóch Amerykanów, dwóch Francuzów, dwóch Niemców, dwóch Anglików i dwóch Włochów. Czy można usadzić ich przy stole tak, aby wszystkie pary narodowościowe pojawiły się obok siebie?

11. Prostokąt

Prostokąt o bokach 2002×2003 podzielony jest na 2002×2003 kwadratów o boku 1. Ile różnych prostokątów jest narysowanych w tym prostokącie?

12. Pocięty wielokąt

Na jaką największą liczbę części prosta może rozciąć wielokąt o 2003 wierzchołkach?

13. Podział kąta

Dany jest 2003-kąt foremny. Jak za pomocą linijki i ołówka podzielić jeden z jego kątów na 2001 równych części?

14. Liczebniki

Jaka liczba rozpoczyna, a jaka kończy alfabetyczny spis liczebników od 1 do 100 w języku polskim?

15. Szprychy w kole

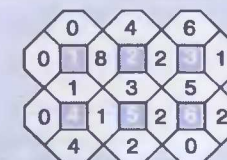
Koło ma ponad 1000 szprych. Jak szybko sprawdzić (bez liczenia), czy ich liczba jest parzysta czy nieparzysta?

Za pomysły zadań wykorzystanych w tym numerze dziękujemy: Krzysztofowi Omiljanowskiemu, Ryszardowi Rudnickiemu, Michałowi Śliwińskiemu i Markowi Zakrzewskiemu.

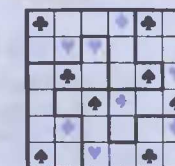
Wyniki i podpowiedzi

Rozwiązania zadań konkursowych z numeru 1/2002

1) Pałac maharadzy. Opisane przejście jest niemożliwe. Pokolorujmy komnaty jak na szachownicy, tak żeby wejściowa była biała. Z komnaty białej przechodzi się zawsze do czarnej i na odwrót. Gdyby przejście opisane w zadaniu było możliwe, startując od komnaty białej, po 16 krokach musielibyśmy dojść do czarnej, a to jest możliwe tylko po nieparzystej liczbie kroków. **2) Dwaj bracia.** Paweł 16, Piotr 14 lat. **3) Dzieci matematyka.** 2, 2, 9. Ze wszystkich rozkładów liczby 36 na trzy czynniki tylko dwa dają jednakowe sumy (więc liczba okien nie rozstrzyga), a z tych dwóch tylko w jednym przypadku jest najstarsze dziecko. **4) W kłębach dymu.** 13 palaczy (palący cygara i fajki mogą też palić papierosy). **5) Wirówka cyfrowa.** Rys. 1. **6) Kwadrat do podziału.** Rys. 2. **7) Loteria fantowa.** (4, 7), (1, 3), (2, 5), (6, 10), (8, 9). **8) Zapalczana układanka.** Można ułożyć 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 lub 12 kwadratów. Rys. 4. **9) W laboratorium.** Do miednicy dotrą 4 l wody. **10) Matematyczne psy.** Rys. 3. **11) Mleko i woda.** Wody w mleku jest tyle samo, co mleka w wodzie. **12) Przed świętym zmarłych.** 119 zniczy (z pierwszych 100 zniczy nadal pozostają odpadki). **13) Winda i deszcz.** Człowiek był niskiego wzrostu, a w czasie deszczu pomagał sobie parasolem. **14) Wypadek samochodowy.** Chirurgiem była matka. **15) Bliźniaki?** Jeden z braci urodził się tuż przed północą, a drugi tuż po północy (pierwszy dzień różnicy), a dziś mieszkają po różnych stronach linii zmiany daty (drugi dzień różnicy).



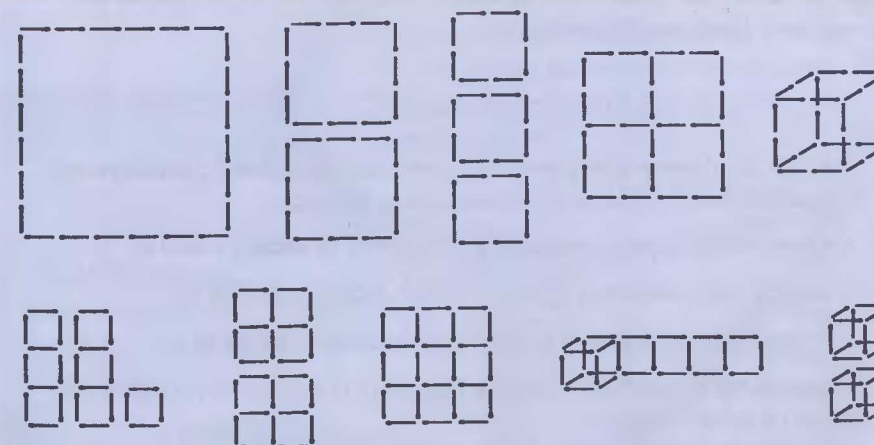
Rys. 1



Rys. 2

$$\begin{array}{r} 2785 \\ \times 238 \\ \hline \end{array}$$

Rys. 3



Rys. 4

Wyniki konkursu z numeru 1/2002

Tylko jedna z nadesłanych prac zawierała przynajmniej 12 poprawnie rozwiązanych zadań (a dokładnie 13). Nagrodę główną w wysokości 200 zł otrzymuje **Ania RADZISZOWSKA** z Gdańska.

Spośród autorów prac z przynajmniej 10 poprawnie rozwiązanymi zadaniami nagrody po 100 zł otrzymują: **Ewa JASIOCHA** Zamość (11 zad.), **Agata KOMOROWSKA** Szczecin (10 zad.), **Magdalena MICHALAK** Jelenia Góra (10 zad.), **Owidiusz PRYK** Grudziądz (10 zad.), **Ryszard RUDNICKI** Włocławek (10 zad.).

Nagrody po 50 zł za przynajmniej 5 poprawnie rozwiązanych zadań otrzymują: **Piotr KUMOR** Olsztyn (11 zad.), **Małgorzata OMELCZUK** Włodawa (9 zad.), **Tadeusz PROKOP** Myszków (8 zad.), **Zbigniew BANACH** Piotrków Trybunalski (7 zad.), **Anna CHRZANOWSKA** Stare Kurowo (7 zad.), **Zofia GROBELNA** Zawiercie (7 zad.) **Wojciech KANAS** Kraków (6 zad.), **Janusz SZCZĘSNY** Bielawa (6 zad.), **Edyta MARKOWSKA** Kampinos (5 zad.), **Łukasz WOŁAŃSKI** Legnica (5 zad.).

Rozwiązanie zadania z artykułu *Od problemu Flawiusza...* z numeru 1/2002

Bezpieczne miejsca to 13 i 28.

Nagrodę książkową za rozwiązania zadań dla Czytelników z numeru 1/2002 otrzymuje p. **Piotr KUMOR** z Olsztyna.

Odpowiedzi do zadań z finału paryskiego mistrzostw w GMiL z numeru 1/2003

1) Na planszy mogło być najwyżej 6 wolnych pól. 2) Najmniejsza liczba strzałów to 10. 3) Ali Baba wykonał 3 cięcia szablą, a każdy rozbojnik otrzymał 3 kawałki kaczki: 1/2, 1/3 i 1/7 pączki. 4) BBABAAB lub AABABBA.

Errata do artykułu *O pewnych własnościach i sekretach liczby 512* z numeru 1/2003

Na stronie 16 w 5 wierszu od góry zabrakło wyjaśnienia, że liczby złożone „rzędu nieparzystego” stoją w ciągu liczb złożonych na miejscach o nieparzystych numerach. W kwadracie magicznym w kolumnie VI zamiast 9 ma być 97, w kolumnie VII zamiast 9 ma być 91. W ostatnim zdaniu po słowie „kole” powinno być „podzielonym na 360°”.

Przepraszamy Autora oraz Czytelników.

✂ — — —
 | Kupon
 | konkursowy
 | „MMM”
 | 2/2003
 | Liczba
 | rozwiązań
 |
 | — — — — —

Wśród Czytelników, którzy do końca czerwca 2003 nadesłali prawidłowe rozwiązania zadań konkursowych rozlosujemy nagrody.

Główna nagroda (za rozwiązania przynajmniej 12 zadań) – **200 zł**,

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) – po **100 zł**,

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) – po **50 zł**.

Rozwiązania w kopertach z naklejonym kuponem konkursowym należy przysyłać na adres redakcji.

Na kuponie prosimy wpisać liczbę rozwiązanych zadań.

Matematycy o matematykach

*Prawie że nie widziałem
matematyka, który
byłby zdolny
do rozumowania.*

Platon

*Matematykami
na ogół zostają osobnicy,
którzy w szkole nie byli
w stanie nauczyć się
wielu niepotrzebnych rzeczy.*

Hugo Steinhaus

*Matematyk to narzędzie
służące do zamieniania kawy
w twierdzenia.*

Pal Erdős

*Dobry matematyk
potrafi dostrzegać fakty,
matematyk wybitny –
analogie między faktami,
zaś matematyk genialny –
analogie między analogiami.*

Stefan Banach

*My – matematycy, nie jesteśmy
normalnymi członkami społeczeństwa.
My próbujemy zrozumieć to, czego
normalni ludzie nie umieją zrozumieć.*

Marek Bożejko

*Niektóre dzieci tak lubią szkołę,
że chcą w niej pozostać przez całe życie.
Matematycy rekrutują się z tych
infantylistów.*

Hugo Steinhaus

*Matematycy
są ekscentryczni z najlepszego
z możliwych powodów –
z definicji.*

John Bowers

*Matematyk
nie umiera nigdy,
po prostu traci
niektóre ze swoich funkcji.*

John C. George



jakie ziarno

taki...

