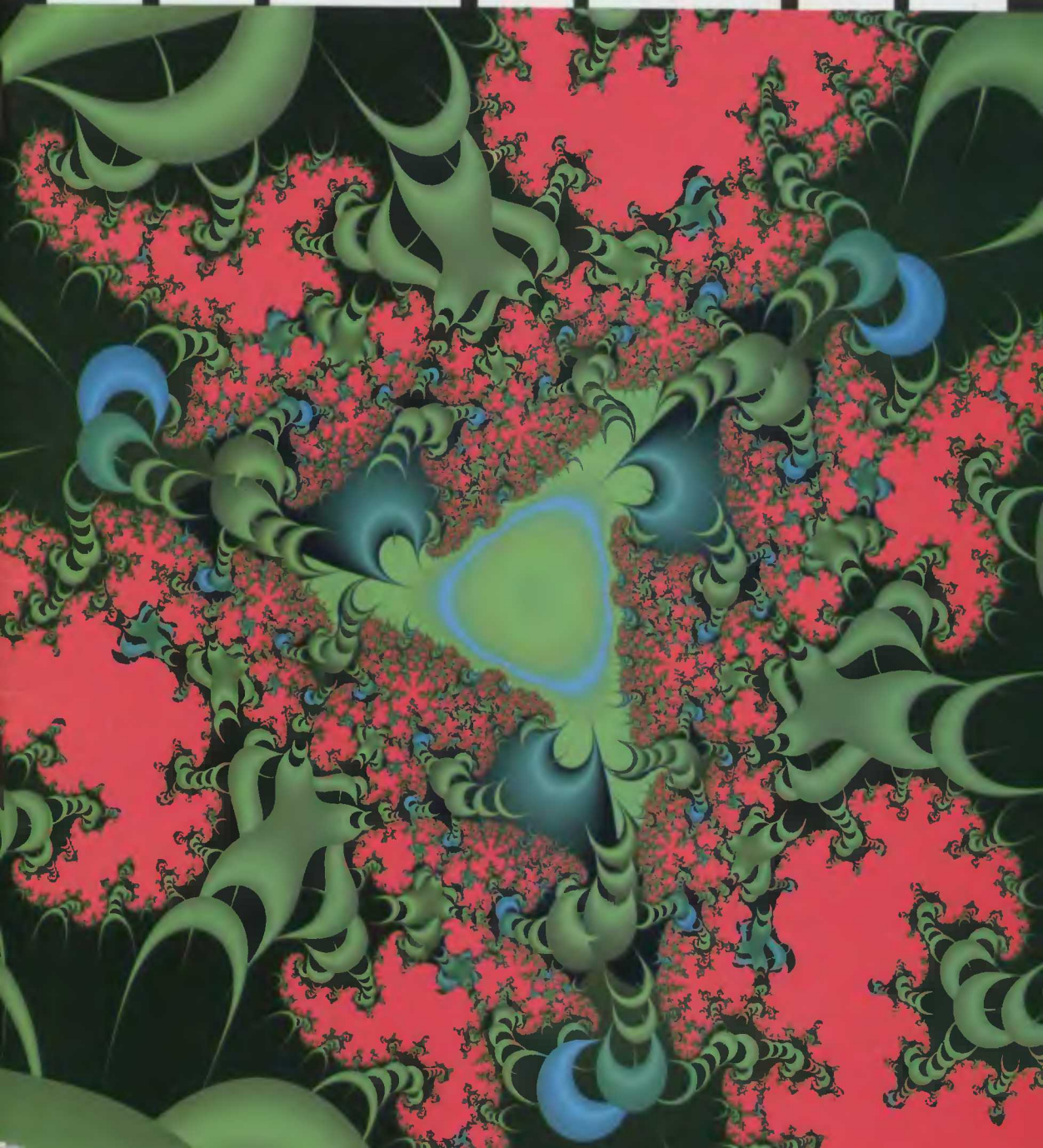
kwartalnik nr 4(5) październik 2003 ISSN 1643-9481 indeks 372366 cena 5 zł (0% VAT)

mmm

magazyn miłośników matematyki



Uczeń ma czasem rację?

Nauczyciel: *Jasiu, jakie działanie zastosujesz, jeśli chcesz z trzech desek zrobić sześć?*
Jaś: *Piłowanie, proszę pani.*

N: Co robimy z przecinkiem gdy mnożymy ułamek dziesiętny przez 10?
J: Przesuwamy o jedno miejsce w stronę drzwi.

J: Przez każde trzy punkty przechodzi jedna prosta.
N: Co ty pleciesz?!
J: Pod warunkiem, że jest odpowiednio gruba.

N: Która rzeka jest dłuższa: Odra czy Wisła?
J: Oczywiście Wisła!
N: Doskonale! A czy wiesz, o ile jest dłuższa?
J: O jedną literę.

N: Która liczba w ciągu 8, 10, 5, 12, 14 jest liczbą pierwszą?
J: Osiem.
N: A pięć?
J: Pięć to liczba trzecia.

N: Co jest bliżej Polski: Księżyc czy Ameryka?
J: Księżyc!
N: Jesteś pewien?
J: Tak, bo Księżyc widać, a Ameryki nie.

N: Jak podzielić 5 jabłek między siedmioro dzieci?
J: Zrobić kompot.

N: Nad rzekę poszło piętnastu chłopców. Pięciu z nich rodzice zabronili wchodzić do wody. Ilu się kąpało?
J: Piętnastu!

Drodzy Czytelnicy!

Dziękujemy za wyjątkowo obfitą wakacyjną korespondencję. Rewanżujemy się numerem również obszerniejszym niż poprzednie. Zapraszamy nie tylko do lektury czasopisma, ale i zaglądania na naszą stronę internetową http//www.atut.ig.pl/mmm.

W bieżącym numerze inicjujemy zapowiadany już dział zadań menedżerskich „Era menedżera", a także cykl kontrowersyjnych felietonów „Z notatnika starego belfra", które zainteresować powinny uczniów i nauczycieli. Powraca dział „Matematyka od podstaw", w którym w sposób elementarny przedstawiamy znane pojęcia i twierdzenia z różnych działów matematyki.

Piszemy też o sukcesach reprezentacji Polski na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Tokio, Międzynarodowych Mistrzostwach w Grach Matematycznych i Logicznych w Paryżu i innych prestiżowych zawodach. Dodatkowo znajdziecie wkładkę z zadaniami z I etapu eliminacyjnego II Mistrzostw Polski w GMiL (będących jednocześnie eliminacjami krajowymi do paryskiego finału). Zapraszamy wszystkich do udziału w tym popularnym konkursie.

Przypominamy Czytelnikom, którzy opłacili prenumeratę tylko do końca roku, o konieczności jej przedłużenia.

Życzymy miłej lektury.
Redakcja

W numerze:

Matematyczne zmagania
Paryż zaprasza mistrzów 2
Nasi górą 4
Sztafeta pokoleń, czyli 5 –10 –15 – 20 ... 5
Etiudy geometryczne
Wariacje na trójkącie
Jerzy Janowicz 6
Era menedżera
Głową w mur
Eugeniusz Sikorski 11
Matematyka od podstaw
O podawaniu rąk
Małgorzata Mikołajczyk 15
Samouczek zadaniowy
Kolorowe grafy
M. Mikołajczyk, L. Stawikowski 18
Rozmaitości z rozwiązaniami
Eugeniusz Sikorski 21
Z życia liczb
I co dalej?
Rościsław Rabczuk 27
Zrób sobie bryłkę
Opakowania
Piotr Pawlikowski 30
Z notatnika starego belfra
Nauczyciel do tablicy
Antoni Dindorf 33
Między nami szperaczami
Wyłowione z sieci
Wojciech Głodek 34
Forum Czytelników 35
Łamanie głowy, czyli burza w mózgu
Zadania konkursowe 36
Wyniki i podpowiedzi 38

mmm Magazyn Miłośników Matematyki 4/2003
http://www.atut.ig.pl/mmm,
ISSN 1643-9481, NAKŁAD 5000 egz.
WYDAWCA: Oficyna Wydawnicza ATUT – Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe

RADA REDAKCYJNA
Rościsław Rabczuk, Zbigniew Romanowicz, Sławomir Suchanowski
REDAKCJA
Małgorzata Mikołajczyk (redaktor naczelny), Michał Śliwiński
PROJEKT OKŁADKI
Adam Łowczycki
MENEDŻER TYTUŁU
Krzysztof Skwark
ADRES REDAKCJI
Magazyn Miłośników Matematyki
50-010 Wrocław, Podwale 62
tel. (0-71) 342 20 56
e-mail: mmm@atut.ig.pl
SKŁAD I ŁAMANIE
Sigma – Ewa Karolczak

WARUNKI PRENUMERATY
Koszt prenumeraty równa się liczbie zamawianych numerów pisma pomnożonej przez cenę pojedynczego numeru (5 zł). Każda wpłata powinna mieć adnotację, których numerów dotyczy, oraz zawierać adres zamawiającego. Można zamawiać również numery archiwalne.
Należność prosimy wpłacać na konto:
Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe
BZ WBK I O/Wrocław
24 1090 2398 0000 0006 0802 5123

CENNIK REKLAM
- Okładka (pełny kolor):
II strona – 3000 zł, III strona – 2000 zł;
- wnętrze (2 kolory):
1 strona – 1000 zł,
1/2 strony – 600 zł,
1/3 strony – 400 zł.

Podane kwoty są cenami netto, należy doliczyć 22% VAT.
Przy zamówieniu reklamy dwukrotnej udzielamy 10% rabatu, przy trzykrotnej – 15%.
Redakcja nie odpowiada za treść reklam i ogłoszeń.

Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadsyłanych tekstów. Niezamówionych materiałów nie zwracamy.

Zapraszamy do współpracy! Redakcja

Matematyczne zmagania

Paryż zaprasza mistrzów

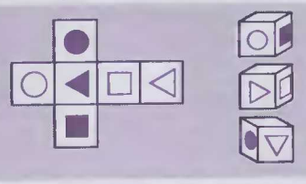
Na początku września wróciła z Paryża reprezentacja Polski na XVII Międzynarodowe Mistrzostwa w Grach Matematycznych i Logicznych. Tradycyjnie był to powrót z tarczą. Wyniki i zadania podajemy poniżej. Zachęcamy do udziału w kolejnej edycji Mistrzostw. W numerze znajdziecie wkładkę z zadaniami I serii eliminacyjnej, a szczegółowe informacje i regulamin konkursu – na stronie internetowej

http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html

W finale paryskim wzięło udział ponad 250 zawodników z 11 krajów, w tym 20-osobowa reprezentacja Polski. Nasi uczniowie wygrali aż w trzech kategoriach: CM (kl. IV SP) – **Tomasz Sodzawiczny** SP 20 w Rudzie Śląskiej, C1 (kl. V i VI SP) – **Tomasz Dobrzycki** SP 7 w Lesznie i C2 (gimnazjum) – **Michał Pilipczuk** od 1 września XIV LO w Warszawie. Kilku innych również zajęło wysokie lokaty (obok nazwisk podajemy symbol kategorii, zajęte miejsce i liczbę uczestników w tej kategorii): **Maciej Pawlikowski** – CE/5/12, **Michał Sosnowski** – C1/4/55, **Piotr Górski** – C2/2/47, **Sławomir Tyszko** – L1/3/44, **Paweł Szerling** – L1/4/44, **Daniel Górski** – L1/6/44, **Michał Miodek** – L1/8/44.

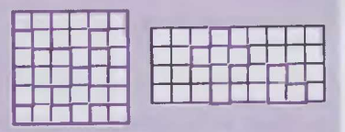
Na rozwiązania zadań czekamy do końca grudnia.

Zawody trwały dwa dni. Poniżej przedstawiamy wybrane zadania z pierwszego dnia (kolejne zamieścimy w następnym numerze). Jeśli zadanie ma więcej niż jedno rozwiązanie, należy podać liczbę rozwiązań i dwa przykładowe.



Zamazane symbole

Na każdej ścianie siatki sześcianu znajduje się pewien symbol. Sześcian ten przedstawiono trzykrotnie na rysunku, ale pewne symbole zamazano. Znajdź brakujące symbole.



Układanka

Matylda podzieliła kwadrat 6 × 6 na 9 kawałków i pokazała go Mateuszowi mówiąc: „Spróbuj pokryć prostokąt 9 × 4 tymi kawałkami tak, żeby nie zachodziły na siebie. Jest to możliwe bez odwracania ich na drugą stronę. Żeby ci pomóc, dwa z nich już umieściłam w prostokącie". Narysuj w prostokącie siedem pozostałych kawałków.

Przygotowanie bankietu

Matylda i Mateusz zaprosili rodzinę i przyjaciół na przyjęcie. Przygotowali dwa identyczne prostokątne stoły i stwierdzili, że
– jeśli połączą je jednym bokiem (aby utworzyły większy prostokąt), to dookoła będzie mogło zasiąść 20 osób,
– jeśli połączą je drugim bokiem, to zyskają 2 miejsca, ale to jeszcze nie wystarczy.
Matylda zauważyła, że wśród obecnych na przyjęciu będzie tyle samo dzieci co dorosłych i zaproponowała, żeby zrobić przyjęcie przy dwóch osobnych stołach. Wtedy wszystkie miejsca będą zajęte i wszyscy się zmieszczą. Ile dzieci będzie na przyjęciu?

Geometryczny spadek

Pewien farmer zostawił w spadku swoim czterem synom teren w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie 240 m i ramionach 150 m do równego podziału. Każdy ma otrzymać parcelę o tej samej powierzchni, ale najstarszy brat domaga się parceli prostokątnej, a najmłodszy – w kształcie trójkąta równoramiennego. Ostatecznie zgadzają się na podział przedstawiony na rysunku. Jaki jest obwód parceli najmłodszego z braci?

Tajny kod

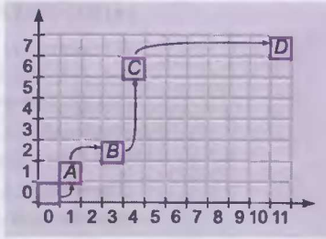
Dyrektor szkoły zamknął pytania egzaminacyjne w kasie pancernej, której drzwi otwiera specjalny kod. Jest on liczbą całkowitą, nie zaczyna się i nie kończy zerem oraz ma następującą własność: jeżeli wykreślimy w nim pewną cyfrę, to otrzymana nowa liczba jest równa $\frac{1}{9}$ liczby początkowej, a jeśli ponownie wykreślimy jedną cyfrę tej drugiej liczby, to otrzymamy dokładnie $\frac{1}{81}$ kodu początkowego. Jaki jest kod kasy pancernej w szkole?

Zagubiony w lesie

Mateusz zabłądził w lesie, który ma kształt trójkąta równobocznego. Nie zna wymiarów lasu, ale posługując się specjalnym instrumentem ustalił, że znajduje się o 6 km od jednego z wierzchołków, o 8 km od drugiego i o 10 km od trzeciego wierzchołka. Jaka jest powierzchnia lasu?

Przemieszczenia na siatce

Szary kwadracik znajduje się w kratce (0, 0) i wykonuje na przemian następujące ruchy:
– przesunięcie o jedną kratkę w prawo, a potem przesunięcie do góry o liczbę kratek równą liczbie zaznaczonej na osi poziomej,
– przesunięcie o jedną kratkę do góry, a potem przesunięcie w prawo o liczbę kratek równą liczbie zaznaczonej na osi pionowej.
Na rysunku pokazano położenia *A*, *B*, *C*, *D* kwadracika po czterech ruchach. Jakie będą współrzędne *Z*?



Sprostowanie. Laureat Mistrzostw Polski w GMiL w kategorii GP Ryszard Luks pochodzi z Chorzowa, a nie, jak błędnie podaliśmy, z Chrzanowa. Z Chrzanowa pochodzi oczywiście „babiczka". Za pomyłkę przepraszamy.

Nasi górą

Sukcesy naszej reprezentacji w Paryżu nie były jedynymi tego lata.

MATEMATYKA

Podczas rozegranych w czerwcu w Grazu XXVI Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych trzy pierwsze miejsca zajęli zawodnicy z Polski (z każdego kraju startowało 8 uczniów). Najlepszy w klasyfikacji indywidualnej był uczeń III LO we Wrocławiu (i stały współpracownik MMM) **Lech Stawikowski**. Kolejne miejsca zajęli **Bartłomiej Romański** (XIV LO Warszawa) i **Michał Pilipczuk** (20 Społeczne Gimnazjum Ogólnokształcące Warszawa), tegoroczny laureat finałów mistrzostw w GMiL w Paryżu. W zawodach zespołowych również zwyciężyła reprezentacja Polski.

Natomiast podczas XLIV Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, która odbyła się w lipcu w Tokio, nasi reprezentanci wywalczyli trzy medale: **Marcin Pilipczuk** (XIV LO Warszawa, były laureat mistrzostw w GMiL) – złoty, a **Paweł Januszewski** (V LO Kraków) i **Aleksander Zabłocki** (IV LO Toruń) – srebrne. W olimpiadzie uczestniczyło 457 uczniów z 82 państw. Maksymalną liczbę punktów zdobyło tylko trzech zawodników (Chińczyk i dwóch Wietnamczyków). W klasyfikacji drużynowej zwyciężyła Bułgaria przed Chinami. Polska zajęła 22 miejsce.

FIZYKA

W sierpniu z medalami wrócili także nasi licealiści z XXXIV Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej z Taipei na Tajwanie. Na 238 uczestników na 9 miejscu uplasował się **Marcin Pilipczuk** (XIV LO Warszawa) i wrócił ze złotym medalem. Medale brązowe zdobyli: **Szymon Szafraniec** (II LO Gorzów Wielkopolski), **Tomasz Kazimierczuk** (I LO Krosno), **Krzysztof Iwaszczuk** (I LO Białystok) oraz **Bartłomiej Szczygieł** (I LO Jelenia Góra).

INFORMATYKA

W kwietniu w Tartu w Estonii swój udział w IX Bałtyckiej Olimpiadzie Informatycznej uwieńczyła wielkim sukcesem ośmioosobowa reprezentacja Polski. Przywiozła cztery złote medale – ich zdobywcami byli: **Bartosz Walczak** (V LO Kraków), **Marcin Michalski** (III LO Gdynia), **Michał Jaszczyk** (XIII LO Szczecin), **Szymon Acedański** (VIII LO Katowice), dwa srebrne – **Filip Wolski** (24 Gimnazjum Gdynia), **Andrzej Chodor** (IV LO Kielce) oraz dwa brązowe – **Łukasz Krupa** (LO Dębica), **Michał Brzozowski** (III LO Gdynia).

W lipcu w Münster w Niemczech odbyła się X Olimpiada Informatyczna Środkowej Europy. W zawodach tych bezapelacyjnie zwyciężył **Bartosz Walczak**. **Filip Wolski** również przywiózł złoty medal, a **Marcin Michalski** – srebrny. Równoległy konkurs, w którym można było zmierzyć się z zadaniami finałowymi, prowadzony był w Internecie.

Równie wielkim sukcesem zakończył się w sierpniu udział naszej reprezentacji w XV Międzynarodowej Olimpiadzie Informatycznej w Wisconsin w USA. Brało w niej udział ponad 250 uczestników z 69 krajów. Wszyscy nasi uczniowie wrócili z medalami: **Bartosz Walczak** i **Filip Wolski** ze złotymi, **Marcin Michalski** ze srebrnym, a **Michał Brzozowski** z brązowym.

Nie gorsi od licealistów okazali się studenci. W marcu drużyna Uniwersytetu Warszawskiego w składzie **Andrzej Gąsienica-Samek**, **Tomasz Czajka** i **Krzysztof Onak** (dwaj pierwsi byli laureatami Międzynarodowych Mistrzostw w GMiL) zdobyła tytuł Mistrzów Świata w Programowaniu Zespołowym w Beverly Hills w Kalifornii. Panowie pokonali drużyny z Moskwy i Petersburga zostawiając daleko w tyle informatyków z USA i Japonii. W zawodach organizowanych po raz 27 przez Association for Computing Machinery i sponsorowanych przez IBM wzięło udział 3850 zespołów z 1329 uczelni ze wszystkich kontynentów. Do finałów w Kalifornii zakwalifikowano 68 drużyn z 25 krajów. Każdy zespół miał do dyspozycji 1 komputer i 5 godzin na programowanie. Polacy (jako jedyni) rozwiązali 9 na 10 zadań.

Wszystkim naszym utytułowanym zawodnikom serdecznie gratulujemy. Więcej informacji o tych i innych zawodach wraz z zadaniami można znaleźć na stronach http://www.om.edu.pl (Olimpiada Matematyczna), http://www.kgof.edu.pl (Olimpiada Fizyczna), http://www.oi.edu.pl (Olimpiada Informatyczna) oraz http://icpc.baylor.edu/icpc (programowanie zespołowe).

Sztafeta pokoleń, czyli 5-10-15-20

Do rozwiązywania zagadek z tej rubryki zapraszamy całe rodziny – wnuków (pięciodziesięcio- i piętnastoletnich) oraz ich rodziców i dziadków (od dwudziestu lat wzwyż).

Bracia i siostry

5. Ile co najmniej dzieci musi być w rodzinie, jeśli każde z nich ma brata i siostrę?

10. Mam pięciu braci, a każdy z nich ma siostrę. Ile dzieci jest w naszej rodzinie?

15. W rodzinie Kowalskich jest sześcioro dzieci. Są one o 2, 4, 8, 10 i 14 lat starsze od najmłodszego Filipa. W tym roku wiek każdego dziecka jest liczbą pierwszą. Ile mają lat?

20. Dwóch chłopców urodziło się tego samego dnia i roku, u tych samych rodziców, ale nie byli bliźniakami. Jak to możliwe?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Etiudy geometryczne

Wariacje na trójkącie

Niejeden doświadczony nauczyciel zwykł mawiać: „Lepiej rozwiązać jedno zadanie dziesięcioma sposobami, niż dziesięć zadań byle jak". Dziś prezentujemy interesujące, a zarazem nietrudne nawet dla szóstoklasisty zadanie geometryczne i dziesięć sposobów jego rozwiązania. Czytelnicy zechcą sami wybrać swój ulubiony.

To właśnie dlatego szkolna geometria jest trudna. Nie ma w niej typowych algorytmów postępowania i standardowych pomysłów. Do rozwiązania może prowadzić wiele dróg, które czasami biegną równolegle, to znów splatają się nieoczekiwanie i znowu rozchodzą, ale wszystkie spotykają się u tego samego celu. Pokazuje to, jak niezwykle bogatym zestawem narzędzi dysponuje (wydawałoby się, że tak uboga) szkolna geometria.

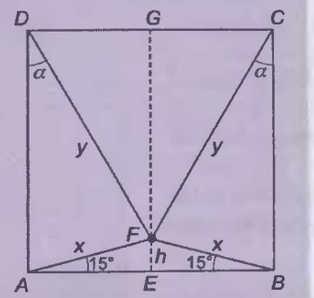
Zadanie 1

Wewnątrz kwadratu *ABCD* budujemy trójkąt równoboczny *CDF*. Jakie są miary kątów trójkąta *ABF*?

Rozwiązanie pozostawiamy Czytelnikom na rozgrzewkę (wskazówkę znajdziecie w numerze). Proste rachunki prowadzą do rezultatu: 15°, 15°, 150°. My zajmiemy się jednak sytuacją odwrotną, czyli rozwiązaniem takiego zadania:

$(\text{Zadanie } 1)^{-1}$

Wewnątrz kwadratu *ABCD* budujemy trójkąt *ABF*, w którym $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA = 15°$. Jakie są rozwartości kątów trójkąta *CDF*?



Rys. 1

Nietrudno domyślić się, że trójkąt *CDF* jest równoboczny. Prześledźmy 10 rozwiązań tego zadania na różnych poziomach, od sposobów elementarnych po bardziej zaawansowane (np. wymagające użycia trygonometrii). Wszystkie rozwiązania poprzedzone są streszczeniem głównego pomysłu.

Przyjmijmy stałe oznaczenia, jak na rysunku 1. Niech bok kwadratu ma długość 1.

Z symetrii rysunku mamy: $AF = FB = x$, $CF = FD = y$. Dla wykazania równoboczności trójkąta *CDF* wystarczy pokazać, że jeden z odcinków *CF* lub *DF* ma długość 1 albo że jeden z kątów *DCF* lub *CDF* ma 60°, albo też, że odcinek *GF* ma długość $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

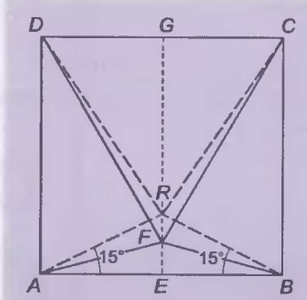
Sposób I (dobudowanie trójkąta równobocznego)

Pomysł

1. Zbudowanie wewnątrz kwadratu trójkąta równobocznego *DCR*.
2. Wykazanie, że $\sphericalangle RAF = 0°$.

Rozwiązanie

Wewnątrz kwadratu budujemy trójkąt równoboczny *CDR*. Przyjmijmy, że wierzchołek *R* leży na odcinku *FG* (przypadek odcinka *FE* rozpatruje się analogicznie). Wtedy (patrz zad. 1) $\sphericalangle RBE = 15°$. Mamy więc: $\sphericalangle RBF = \sphericalangle RBE - \sphericalangle FBE = 15° - 15° = 0°$. Zatem ramiona *BF* i *BR* pokrywają się, a wobec symetrii rysunku $R = F$. Z tego wynika, że trójkąt *DCF* jest równoboczny.



Rys. 2

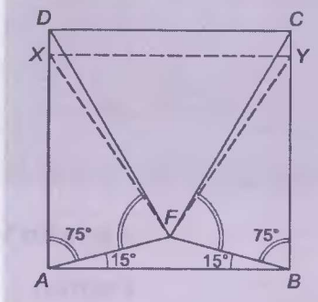
Sposób II (dobudowanie trójkątów równoramiennych)

Pomysł

1. Zbudowanie trójkątów równoramiennych *AFX* i *BFY*.
2. Uzasadnienie, że trójkąt *XFY* jest równoboczny.
3. Uzasadnienie, że $X = D$ oraz $Y = C$.

Rozwiązanie

Na odcinkach *AF* i *BF* jako podstawach budujemy trójkąty równoramienne o kątach przy podstawach po 75° tak, aby ich trzecie wierzchołki leżały odpowiednio na półprostych $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$. Oznaczmy te wierzchołki przez *X* i *Y*. Mamy: $\sphericalangle XFY = 360° - (150° + 2 \cdot 75°) = 60°$. Z symetrii rysunku wiemy, że trójkąt *XFY* jest równoramienny, a skoro jeden z jego kątów ma 60°, to jest też równoboczny. Ale $XY = 1$, więc także $FX = 1$ i $FY = 1$. Pamiętamy jednak, że trójkąty *AFX* i *BFY* były równoramienne, więc $AX = 1$ i $BY = 1$. Wobec tego $AX = AD$ i $BY = BC$, skąd $X = D$ oraz $Y = C$. Zatem trójkąty *XFY* i *DFC* pokrywają się i trójkąt *DFC* jest równoboczny.



Rys. 3

Sposób III (symetria)

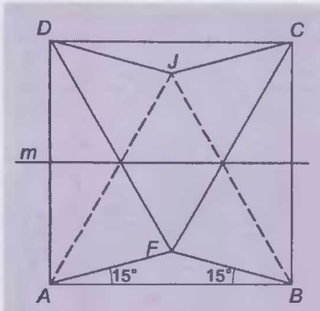
Pojęcie symetrii i stosowane niżej oznaczenia były wprowadzone w artykule *Odbijany* w poprzednim numerze MMM.

Pomysł

1. Zbudowanie wewnątrz kwadratu trójkąta równobocznego *ABJ*.
2. Dowód przystawania trójkątów *ABF* i *CDJ*.
3. Dowód przystawania trójkątów *ABJ* i *CDF* (symetria względem prostej *m*).

Rozwiązanie

Budujemy wewnątrz kwadratu trójkąt równoboczny *ABJ*. Wtedy (patrz zad. 1) $\sphericalangle JDC = \sphericalangle JCD = 15°$. Zatem trójkąty *AFB* i *DJC* są przystające. Prowadzimy prostą *m* przez środki boków *AD* oraz *BC* i traktujemy ją jako oś symetrii. Wtedy $\Delta DJC = S_m(\Delta AFB)$, a w szczególności: $D = S_m(A)$, $C = S_m(B)$, $J = S_m(F)$. Ostatnią równość możemy zapisać równoważnie jako $F = S_m(J)$. Wynika stąd, że $\Delta DFC = S_m(\Delta AJB)$, czyli że trójkąty *DFC* i *AJB* są przystające, czyli trójkąt *DFC* jest równoboczny.



Rys. 4

Sposób IV (dobudowanie kopii trójkąta wewnątrz)

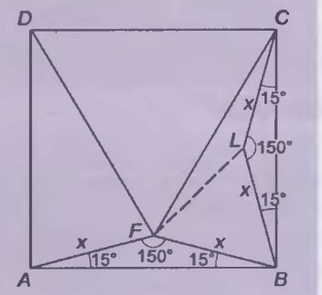
W tym sposobie są dwie drogi.

Pomysł

1. Zbudowanie wewnątrz kwadratu trójkąta BCL przystającego do ABF.

2. Wykazanie, że $\sphericalangle FCL = 15°$.
3. Wykazanie, że $\sphericalangle FCD = 60°$.

2. Wykazanie, że $\triangle FCL \equiv \triangle BCL$.
3. Wykazanie, że $FC = BC = 1$.



Rys. 5

Rozwiązanie

Budujemy wewnątrz kwadratu trójkąt BCL przystający do ABF. Trójkąt BFL jest równoramienny ($BF = BL$) i $\sphericalangle FBL = 60°$, więc jest też równoboczny i $FL = x$. Ponadto $\sphericalangle FLC = 360° - 60° - 150° = 150°$.

Trójkąt FLC jest równoramienny, więc

$\sphericalangle FCL = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$,

czyli

$\sphericalangle FCD = 90° - 15° - 15° = 60°$.

Z cechy „bkb" przystawania trójkątów mamy:

$\triangle FLC \equiv \triangle BLC$,

więc

$FC = BC = 1$.

W obu przypadkach trójkąt DFC jest równoboczny.

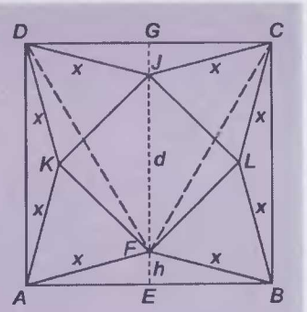
Sposób V (dobudowanie trzech kopii trójkąta)

Pomysł

1. Zbudowanie wewnątrz kwadratu na jego bokach trójkątów przystających do ABF (patrz rys. 6).
2. Dowód, że czworokąt $FLJK$ jest kwadratem.
3. Wyznaczenie x (obliczenie długości przekątnej AC dwoma sposobami).
4. Obliczenie długości h.
5. Obliczenie długości odcinków DF i CF.

Rozwiązanie

Wewnątrz kwadratu na jego bokach budujemy trójkąty przystające do AFB. Trójkąt FAK jest równoramienny ($AF = AK = x$) i $\sphericalangle FAK = 60°$, więc jest też równoboczny.



Rys. 6

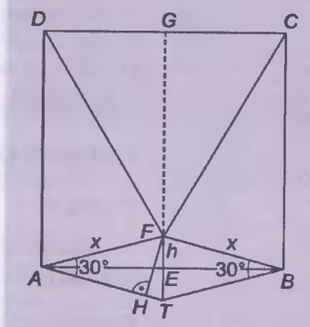
Analogicznie równoboczne są trójkąty: DKJ, CJL i BLF. Zatem $FLMN$ jest rombem i łatwo sprawdzić, że jego kąty są proste, jest więc kwadratem. Wiemy, że $AC = \sqrt{2}$, ale mamy też: $AC = 2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} + x$, czyli $x\sqrt{3} + x = \sqrt{2}$, skąd $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$.

Natomiast $h = 1 - GF$ można też obliczyć jako $\frac{1-d}{2}$, gdzie $d = x\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1$. Stąd $h = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $GF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i wtedy $DF = 1$ oraz $CF = 1$, co oznacza, że trójkąt CDF jest równoboczny.

Sposób VI (dobudowanie kopii trójkąta na zewnątrz)

Pomysł

1. Zbudowanie na zewnątrz kwadratu trójkąta ABT przystającego do ABF.
2. Znalezienie związku między x i h (obliczenie dwoma sposobami pola trójkąta ATF).
3. Obliczenie długości odcinków DF i CF.



Rys. 7

Rozwiązanie

Budujemy na zewnątrz kwadratu trójkąt ATB przystający do AFB. Niech $\overline{FH} \perp \overline{AT}$. Wtedy trójkąt AHF jest połówką trójkąta równobocznego, czyli $HF = \frac{1}{2}x$. Pole ATF jest równe $\frac{1}{2} \cdot AT \cdot HF = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{4}$, ale także $\frac{1}{2} \cdot TF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot \frac{1}{2} = \frac{h}{2}$, co daje $\frac{h}{2} = \frac{x^2}{4}$, czyli $x^2 = 2h$. W trójkącie AEF mamy $x^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, a po podstawieniu $2h = h^2 + \frac{1}{4}$, czyli $h^2 - 2h + \frac{1}{4} = 0$. W trójkącie DGF mamy także: $DF^2 = GF^2 + DG^2 = (1-h)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(h^2 - 2h + \frac{1}{4}\right) + 1 = 1$, więc $DF = 1$. Podobnie $CF = 1$, więc trójkąt CDF jest równoboczny.

Sposób VII (podobieństwo trójkątów)

Pomysł

1. Obliczenie długości odcinka HT (patrz rys. 7).
2. Obliczenie h (wykorzystanie podobieństwa trójkątów AET i FHT) oraz GF.

Rozwiązanie

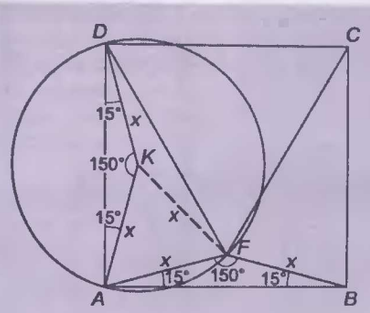
Mamy $HF = \frac{x}{2}$ (patrz sposób VI) oraz $AH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Stąd $HT = x - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}x$.

Z podobieństwa trójkątów AET i FHT (cecha „k" dla trójkątów prostokątnych) otrzymujemy: $\frac{ET}{EA} = \frac{HT}{HF}$, co daje $\frac{h}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}x}{\frac{x}{2}}$, skąd $h = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stąd $GF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli trójkąt CDF jest równoboczny.

Sposób VIII (kąt wpisany i środkowy)

Pomysł

1. Zbudowanie wewnątrz kwadratu trójkąta ADK przystającego do ABF.
2. Opisanie okręgu na trójkącie ADF.
3. Uzasadnienie, że $\sphericalangle ADF = 30°$.
4. Uzasadnienie, że $\sphericalangle CDF = \sphericalangle DCF = 60°$



Rys. 8

Rozwiązanie

Budujemy wewnątrz kwadratu trójkąt ADK przystający do ABF. Opisujemy okrąg na trójkącie ADF. Trójkąt AKF jest równoboczny (patrz sposób IV), więc $KA = KF$. Mamy też $KA = KD$, więc punkt K jest środkiem opisanego okręgu. Kąt AKF jest środkowy i ma 60°, więc kąt ADF jako wpisany oparty na tym samym łuku ma 30°. Stąd $\sphericalangle CDF = \sphericalangle DCF = 90° - 30° = 60°$. Zatem trójkąt DFC jest równoboczny.

Sposób IX (trygonometria)

Pomysł

1. Obliczenie $\operatorname{ctg}\alpha$ i α (patrz rys. 1).
2. Obliczenie $\sphericalangle DCF$.

Rozwiązanie

Mamy: $\operatorname{ctg}\sphericalangle EFB = \operatorname{ctg}75° = \frac{h}{0{,}5} = 2h$ oraz $\cos\alpha = \frac{1-h}{y}$ i $\sin\alpha = \frac{0{,}5}{y}$ (bo $\alpha = \sphericalangle BCF = \sphericalangle CFG$ jako kąty naprzemianległe). Stąd

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-h}{y}\cdot\frac{y}{0{,}5} = 2-2h = 2-\operatorname{ctg}75° = 2-\operatorname{ctg}(45°+30°) =$$

$$= 2-\frac{\operatorname{ctg}45°\cdot\operatorname{ctg}30°-1}{\operatorname{ctg}45°+\operatorname{ctg}30°} = 2-\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2-\frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Skoro $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$ i α jest kątem ostrym, to $\alpha = 30°$. Stąd $\sphericalangle DCF = 90° - 30° = 60°$. Zatem trójkąt CDF jest równoboczny.

Sposób X (twierdzenie kosinusów)

Pomysł

1. Obliczenie długości x (z twierdzenia kosinusów).
2. Obliczenie długości h (z twierdzenia Pitagorasa).
3. Obliczenie długości odcinka GF.

Rozwiązanie

Z twierdzenia kosinusów dla trójkąta ABF (patrz rys. 1) mamy: $1^2 = x^2 + x^2 - 2x\cdot x\cdot\cos150°$, czyli $1 = 2x^2 + x^2\sqrt{3}$. Stąd $x^2 = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$. Z kolei w trójkącie AEF mamy: $h^2 = x^2 - 0{,}5^2$. Stąd otrzymujemy: $h^2 = 2-\sqrt{3}-0{,}25 = \frac{7}{4}-\sqrt{3}$, a dalej: $h = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Stąd $GF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $DF = CF = 1$, więc trójkąt CDF jest równoboczny.

Jerzy Janowicz

KONKURS

W konkursie na najdłuższy wyraz z osią symetrii prowadzą na razie siedmioliterowe OBIBOKI i AUTOMAT.

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

Era menedżera

Głową w mur

Często w zadaniach matematycznych, a także w zagadnieniach życia codziennego, spotyka się problemy optymalizacyjne, np. minimalizację czasu lub kosztów jakiegoś przedsięwzięcia. Licealistom zadania takie kojarzą się od razu z rachunkiem pochodnych, ale wiele tego typu zagadnień można rozwiązać metodami elementarnymi. Dziś poznamy jedną z takich metod.

Dygresja o średnich

W dalszych rozumowaniach będziemy korzystali z nierówności, którą zapewne wielu z Was dobrze zna. Dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. Wielkość po lewej stronie nazywamy średnią geometryczną, a po prawej – średnią arytmetyczną liczb a i b. Jeśli a i b oznaczają dowolne liczby dodatnie, to wartości $\sqrt{ab}$ i $\frac{a+b}{2}$ leżą zawsze pomiędzy nimi, więc rzeczywiście mogą być uznane za pewne „wielkości pośrednie" między a i b. A skąd wiadomo, że te liczby zawsze „wpadają" pomiędzy a i b? Załóżmy, że $a \le b$. Wtedy wystarczy pokazać, że $a \le \sqrt{ab} \le b$ oraz $a \le \frac{a+b}{2} \le b$. A to jest bardzo łatwe. Przecież $a = \frac{a+a}{2} \le \frac{a+b}{2} \le \frac{b+b}{2} = b$ i podobnie $a = \sqrt{aa} \le \sqrt{ab} \le \sqrt{bb} = b$.

Spróbujmy teraz uzasadnić, że podana na początku nierówność jest prawdziwa, to znaczy, że średnia geometryczna jest zawsze mniejsza lub równa arytmetycznej. Istnieje wiele różnych dowodów tej nierówności. Podamy tu dwa najprostsze:

DOWÓD ALGEBRAICZNY

Obie strony nierówności podnosimy do kwadratu (można to zrobić, bo są to liczby dodatnie).

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \quad /^2$$

$$ab \le \frac{a^2+2ab+b^2}{4}.$$

Wykonujemy przekształcenia (które dają zawsze nierówności równoważne wyjściowej) i mamy:

$4ab \le a^2+2ab+b^2$,

$a^2-2ab+b^2 \ge 0$, czyli $(a-b)^2 \ge 0$.

A ta nierówność jest zawsze prawdziwa (bo przecież kwadrat dowolnej liczby jest nieujemny). Skoro nierówność prawdziwa jest równoważna nierówności między średnimi, to i ona musi być zawsze prawdziwa.

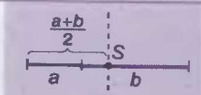
DOWÓD GEOMETRYCZNY

Średnie arytmetyczną i geometryczną można zilustrować geometrycznie. Weźmy odcinki o długościach a i b.

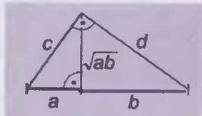
Odcinek o długości $\frac{a+b}{2}$ jest połową odcinka będącego sumą a i b (rys. 1).

Odcinek o długości $\sqrt{ab}$ jest wysokością opuszczoną z kąta prostego trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej będącej sumą a i b, jeśli wysokość ta dzieli przeciwprostokątną w stosunku $a:b$ (rys. 2). Można to łatwo uzasadnić korzystając trzykrotnie z twierdzenia Pitagorasa. Mamy bowiem:

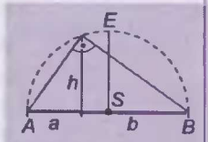
$h^2+a^2=c^2$, $h^2+b^2=d^2$ oraz $c^2+d^2=(a+b)^2$. Podstawiając za c^2 i d^2 mamy: $h^2+a^2+h^2+b^2=(a+b)^2$, czyli $2h^2+a^2+b^2 = a^2+2ab+b^2$. Aby ta równość zachodziła, musi być $2h^2=2ab$, czyli $h=\sqrt{ab}$, a to chcieliśmy pokazać. Nierówność między średnimi można teraz zobaczyć jak na dłoni (rys. 3).



Rys. 1



Rys. 2



$h=\sqrt{ab}\le SE=AS=\frac{a+b}{2}$

Rys. 3

Nasuwa się jeszcze pytanie, czy są liczby, których średnia arytmetyczna i geometryczna są równe? Przecież rozważana nierówność była nieostra, to znaczy dopuszczała przypadek równych średnich. Z dowodu algebraicznego wynika natychmiast, że aby nieostrą nierówność $(a-b)^2 \geq 0$ zastąpić równością, $a-b$ musi być zerem, czyli $a=b$. Podobnie z rysunku 3 widać, że wysokość trójkąta prostokątnego będzie równa promieniowi okręgu opisanego tylko wtedy, gdy będzie to trójkąt równoramienny. Ale wtedy wysokość spada na środek podstawy, czyli też otrzymujemy $a=b$. Dwoma sposobami pokazaliśmy zatem, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

Zadanie 1

Liczbę dodatnią K rozłożyć na dwa dodatnie czynniki (niekoniecznie całkowite) tak, aby ich suma była jak najmniejsza.

Rozwiązanie

Niech a i b będą liczbami dodatnimi, dla których zachodzi: $a \cdot b = K$. Pokazaliśmy wcześniej, że zachodzi nierówność: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Podstawmy do niej w miejsce iloczynu a i b liczbę K. Mamy: $\sqrt{K} \leq \frac{a+b}{2}$, czyli $2\sqrt{K} \leq a+b$.

Zatem przy dowolnym wyborze czynników a i b, ich suma nie może być mniejsza niż $2\sqrt{K}$ i jest najmniejsza, gdy zachodzi równość $2\sqrt{K} = a+b$. Ale ta równość ma miejsce tylko wtedy, gdy $a=b$, zatem $2\sqrt{K} = a+a$, skąd $a=\sqrt{K}$ i $b=\sqrt{K}$. Doszliśmy więc do wniosku, że spośród liczb dodatnich a i b, takich że $a \cdot b = K$, suma liczb a i b jest najmniejsza wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b=\sqrt{K}$.

Twierdzenie

Funkcja $f(x) = x + \frac{K}{x}$ (gdzie $K > 0$), w której zmienna x przyjmuje wartości dodatnie, osiąga najmniejszą wartość tylko przy $x = \sqrt{K}$.

Dowód

Skorzystamy z zadania 1, bowiem dla każdego $x > 0$ obie liczby x i $\frac{K}{x}$ są dodatnie, a ich iloczyn jest stale równy K. Zatem spośród wszystkich sum postaci $x + \frac{K}{x}$ najmniejszą wartość przyjmuje ta, której składniki są równe, to znaczy $x = \frac{K}{x}$, czyli $x = \sqrt{K}$. Twierdzenie zostało udowodnione.

Teraz możemy już przystąpić do rozwiązywania naszego pierwszego menedżerskiego problemu.

Problem

Władze gminy Wrotki Wywrotowe postanowiły wybudować boisko dla nowo powstałego gimnazjum i ogrodzić je solidnym, dwumetrowym murem. Ustalono, że boisko ma być prostokątem o powierzchni 6480 m^2. Koszt budowy ogrodzenia stanowił największą część kosztów całej budowy, a ponieważ budżet gminy był skromny, władze zastanawiały się, jak zmniejszyć do minimum wydatki na budowę ogrodzenia. Jeden z radnych podsunął pomysł, aby boisko usytuowane było wzdłuż

stojącego blisko szkoły starego muru o długości 108 m. – Mur ten jest dobrze zachowany i ma dokładnie 2 m wysokości. Można go częściowo wykorzystać jako ogrodzenie, wystarczy go tylko na nowo otynkować. Poza tym fragmenty starego muru można rozebrać, a uzyskany materiał powtórnie wykorzystać – przekonywał radny. Pomysł został przyjęty z entuzjazmem. Ogłoszono przetarg na wykonanie prac, ale stanęła do niego tylko jedna firma, która przedstawiła następującą ofertę:

NAMURBETON ojciec i synowie Sp. z n. n.
Wrotki Wywrotowe 167

Kosztorys budowy ogrodzenia boiska szkolnego

1. Koszt budowy 1 m muru z nowego materiału – 200 zł,
2. Tynkowanie 1 m starego muru – 30% kosztów budowy 1 m nowego muru,
2. Rozbiórka 1 m starego muru i zbudowanie z tego materiału takiego samego odcinka nowego muru – 70% kosztów budowy 1 m nowego muru.

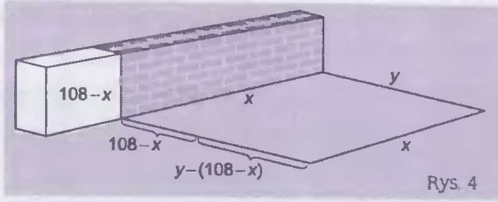
sporządził inż. Ramon La Mur

Radni musieli przy tych warunkach zdecydować, jak prowadzić prace, aby koszty całego przedsięwzięcia były jak najniższe. Z pomocą przyszedł dyrektor gimnazjum, który był nauczycielem matematyki. Szybko obliczył minimalny koszt budowy ogrodzenia. A czy Ty potrafisz rozwiązać ten problem?

Rozwiązanie dyrektora

Spróbujmy podjąć najkorzystniejszą decyzję dotyczącą wykorzystania starego muru (oczywiście wykorzystamy go w całości, gdyż obniża to koszty budowy). Na rys. 4 przedstawiona jest sytuacja, w której zachowujemy x metrów starego muru (do remontu) i rozbieramy $108-x$ metrów starego muru, aby z wykorzystanego powtórnie materiału zbudować taki sam odcinek nowego muru. Boisko będzie miało kształt prostokąta o wymiarach x na y metrów, gdzie $x \cdot y = 6480$. Obwód boiska, a więc i długość całego muru, wyniesie więc $2x+2y$ metrów, z czego:

x metrów – stary mur po remoncie,
$108-x$ metrów – mur z odzyskanego materiału,
$2x+2y-108$ – mur z nowego materiału.



Rys. 4

Zatem za budowę całego ogrodzenia gmina musiałaby zapłacić:

$$\frac{30}{100} \cdot 200x + \frac{70}{100} \cdot 200(108-x) + 200(2x+2y-108) \text{ zł.}$$

Uprośćmy to wyrażenie:

$$60x + 140(108-x) + 200(2x+2y-108) =$$
$$= 60x + 15120 - 140x + 400x + 400y - 21600 =$$
$$= 320x + 400y - 6480.$$

Ostatecznie możemy je zapisać w postaci: $80(4x+5y) - 6480$. Jest to koszt budowy całego ogrodzenia w zależności od wymiarów boiska x i y. Jedną ze zmiennych możemy wyeliminować korzystając z zależności $x \cdot y = 6480$, skąd $y = \frac{6480}{x}$.

Podstawiając to wyrażenie za y do kosztu budowy ogrodzenia otrzymujemy: $80(4x + 5 \cdot \frac{6480}{x}) - 6480$. Po uproszczeniach mamy:

$$80(4x + \frac{32\,400}{x}) - 6480 = 80(4x + 4 \cdot \frac{8100}{x}) - 6480 = 320(x + \frac{8100}{x}) - 6480.$$

Zatem całkowity koszt budowy to $320(x + \frac{8100}{x}) - 6480$ zł gdzie x oznacza długość zachowanej części starego muru. Aby koszt ten był najmniejszy, odjemna powinna być najmniejsza, co ma miejsce dla takiego x dodatniego, przy którym funkcja $f(x) = x + \frac{8100}{x}$ przyjmuje najmniejszą wartość. Z udowodnionego wcześniej twierdzenia wiemy, że ta najmniejsza wartość jest osiągana przy $x = \sqrt{8100} = 90$. Podstawiając tę liczbę do wyrażenia opisującego koszt budowy ogrodzenia otrzymamy najniższy możliwy koszt, czyli $320(90 + \frac{8100}{90}) - 6480 = 57600 - 6480 = 51\,120$ zł. Zatem spośród możliwych decyzji co do wykorzystania starego muru najkorzystniejsza jest ta polegająca na rozebraniu $108 - 90 = 18$ metrów muru. Wtedy koszt budowy będzie najniższy i wyniesie 51 120 zł, a boisko będzie miało wymiary 90 m × 72 m.

Po zakończeniu wywodów dyrektora część radnych miała jednak wątpliwości. Może korzystniej byłoby w ogóle starego muru nie rozbierać? Można przecież zrobić boisko o wymiarach 108 m × 60 m ($108 \cdot 60 = 6480$) albo nawet przedłużyć trochę stary mur. Przypadek boiska „108 × 60" już rozpatrzyliśmy w poprzednim rozumowaniu($x = 108$) – zauważył matematyk. Natomiast gdyby przedłużyć stary mur, to jeden z boków boiska miałby długość $a \cdot 108$ m (gdzie $a > 1$), a drugi musiałby mieć długość $\frac{1}{a} \cdot 60$ m (bo $a \cdot 108 \cdot \frac{1}{a} \cdot 60 = 6480$). Obwód muru wyniósłby wtedy $2(a \cdot 108 + \frac{1}{a} \cdot 60) = 216a + 120 \cdot \frac{1}{a}$ metrów. Koszt takiego ogrodzenia wyniósłby 6480 zł na odcinku 108 m starego muru do remontu i $200 \cdot (216a + 120 \cdot \frac{1}{a} - 108)$ zł za postawienie nowego muru. W sumie daje to $6480 + 43\,200a + 24\,000 \cdot \frac{1}{a} - 21\,600 = 43\,200a + 24\,000 \cdot \frac{1}{a} - 15\,120$ zł. Aby przekonać się, że decyzja o przedłużeniu muru jest mniej korzystna niż decyzja o jego rozbiórce, wystarczy pokazać, że dla każdego $a > 1$ zachodzi nierówność $43\,200a + 24\,000 \cdot \frac{1}{a} - 15\,120 > 52\,080$. Można to łatwo stwierdzić przekształcając nierówność w sposób równoważny:

$$43\,200a + 24\,000 \cdot \frac{1}{a} - 15\,120 > 52\,080 \qquad / + 15\,120$$

$$43\,200a + 24\,000 \cdot \frac{1}{a} > 67\,200 \qquad / : 400$$

$$108a + 60 \cdot \frac{1}{a} > 168 = 108 + 60$$

$$108a - 108 > 60 - 60 \cdot \frac{1}{a}$$

$$108(a - 1) > 60(1 - \frac{1}{a}) = 60 \cdot \frac{a-1}{a} \qquad / \cdot \frac{a}{a-1}$$

(> 0, więc znak nierówności nie zmieni się)

$$108a > 60.$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa dla każdego $a > 1$, jest też równoważna wyjściowej nierówności, która musi więc być prawdziwa. Zatem każda decyzja, w której stary mur nie będzie rozebrany, jest mniej korzystna.

Eugeniusz Sikorski

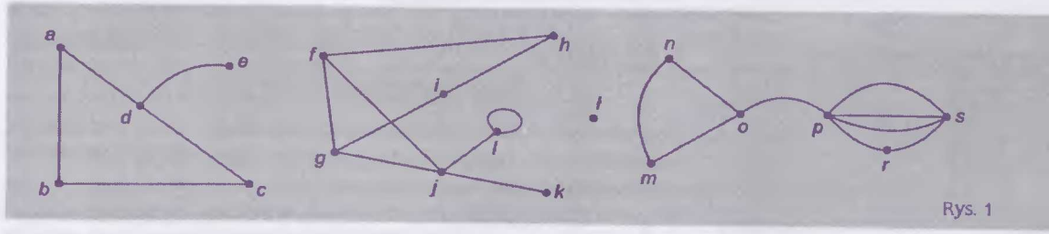
Matematyka od podstaw

O podawaniu rąk

W artykule będzie mowa o grafach. Teoria grafów to dział matematyki, który rozwinął się w XX wieku. Metody wypracowane przez zajmujących się tą dziedziną matematyków znalazły zastosowanie w ekonomii, informatyce, zagadnieniach transportowych i logistycznych, a nawet w tak zdawałoby się odległych od matematyki dziedzinach, jak genetyka, socjologia, lingwistyka czy antropologia. Także rozwiązania wielu łamigłówek logicznych opierają się na prezentacji ich w formie grafu i badaniu pewnych jego własności. W kolejnych numerach opiszemy kilka takich własności.*

Co to jest graf?

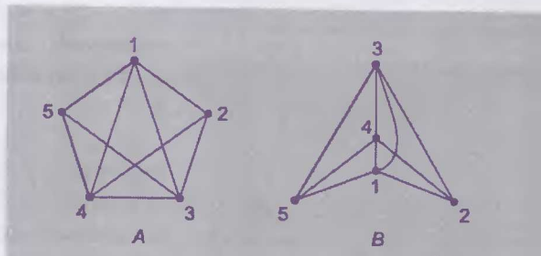
Oto przykład grafu, który nazywamy czteroczęściowym:



Rys. 1

Są to punkty $a, b, c, d, \ldots, s$, które nazywamy **wierzchołkami** grafu, i łączące je linie, które nazywamy **krawędziami** grafu. Linia łącząca a z c nie jest krawędzią. Jest to droga złożona z krawędzi ad i dc. Punkt przecięcia na rysunku krawędzi fj i gi nie jest wierzchołkiem grafu. Możemy myśleć, że te krawędzie przechodzą jedna nad drugą i nie przecinają się. Pomiędzy wierzchołkami może być kilka krawędzi (np. 3 krawędzie łączące p i s). Wierzchołek l połączony jest krawędzią z samym sobą. Taką krawędź nazywamy **pętlą**. Wierzchołek l nie jest połączony z żadnym innym. Nazywamy go wierzchołkiem **pustym**.

W grafie ważne jest tylko to, które wierzchołki są, a które nie są połączone krawędziami, nie jest ważne, w jaki sposób te krawędzie poprowadzimy i jaki będzie kształt geometryczny otrzymanego rysunku. Na rys. 2 grafy A i B wyglądają inaczej, ale w rzeczywistości przedstawiają ten sam graf. Można sprawdzić, że wierzchołki o numerach n i m są połączone krawędzią w grafie A wtedy i tylko wtedy, gdy n i m są połączone w grafie B.

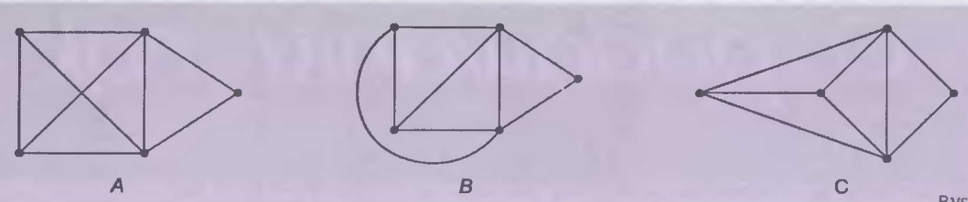


Rys. 2

* Patrz artykuły: *Kolorowe grafy* (s. 18) oraz *Gry w matematyce rekreacyjnej cz. (1)* i *(2)* (MMM nr 1/2002 i nr 1/2003).

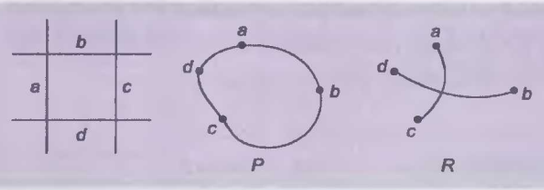
Ćwiczenie 1

Czy któreś grafy z rysunku 3 przedstawiają ten sam graf?



Rys. 3

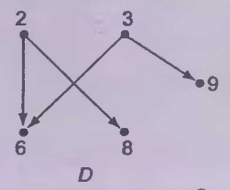
Za pomocą grafów często ilustruje się pewne obiekty i zachodzące między nimi relacje. Zacznijmy od kilku prostych przykładów.



Rys. 4

Przykład 1

Na płaszczyźnie dane są proste *a*, *b*, c i *d* położone jak na rys. 4. Graf *P* ilustruje relację prostopadłości tych prostych, a graf *R* – relację ich równoległości.



Rys. 5

Przykład 2

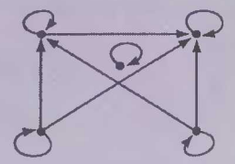
Graf *D* (rys. 5) ilustruje relację podzielności liczb 2, 3, 6, 8, 9.

W grafach *P* i *R* wierzchołki połączone są krawędziami bez strzałek, bo relacje równoległości i prostopadłości zachodzą „w dwie strony" (mówimy, że są symetryczne), tzn. jeśli np. $a \perp b$, to także $b \perp a$. W grafie *D* krawędzie zaopatrzone są w strzałki, bo relacja podzielności nie jest symetryczna. Połączenie 2 i 6 oznacza, że 2 dzieli 6, ale 6 nie może być połączone z 2, bo 6 nie dzieli 2. W tym przypadku wiemy nie tylko, które wierzchołki są połączone, ale znamy kierunek tego połączenia. Mówimy, że grafy *P* i *R* są **nieskierowane**, a graf *D* jest **skierowany**.

Między nami erudytami

Niemiecki arystokrata, któremu wskazano drogę?

graf skierowany



Rys. 6

Ćwiczenie 2

Graf skierowany na rys. 6 ilustruje relację podzielności pewnych liczb naturalnych. Jakie to liczby? Jak zmieni się ten graf, gdy dodamy wierzchołek oznaczający 1? A 0? Jakie cechy mają grafy relacji podzielności (dla dowolnych liczb jako wierzchołków)?

Jednym z podstawowych pojęć w teorii grafów jest pojęcie rzędu. **Rząd wierzchołka *a*** (ozn. *r*(*a*)), to po prostu liczba krawędzi wychodzących z wierzchołka *a* (w grafie skierowanym liczymy krawędzie wychodzące i wchodzące). **Rząd grafu G** (ozn. *r*(G)), to suma rzędów wszystkich wierzchołków.

Ćwiczenie 3

Podaj rzędy wierzchołków grafu będącego szkieletem graniastosłupa/ostrosłupa o podstawie *n*-kąta. Jakie są rzędy takich grafów? A grafów stanowiących siatki takich brył?

Ćwiczenie 4

Narysuj graf o wierzchołkach *p*, *q*, *s*, *t* spełniających: $r(q) = 1$, $r(s) = 8$, $r(t) = 10$ oraz
a) $r(p) = 1$, b) $r(p) = 2$, c) $r(p) = 3$.

Ćwiczenie 5

Znajdź rzędy kilku dowolnych grafów. Porównaj je z liczbą krawędzi w danym grafie. Co zauważyłeś?

Twierdzenie

Rząd grafu jest dwukrotnie większy niż liczba jego krawędzi (zatem jest zawsze liczbą parzystą!).

Dowód

Uzasadnienie tego twierdzenia jest bardzo proste. Rząd grafu obliczamy dodając rzędy poszczególnych wierzchołków, ale ponieważ każda krawędź łączy dokładnie dwa wierzchołki, więc w tym dodawaniu każda jest liczona dwukrotnie.

To twierdzenie nazywane jest w matematyce twierdzeniem **„o podawaniu rąk"**. Skąd ta dziwna nazwa? Niech wierzchołki grafu symbolizują ludzi, a połączenie krawędzią oznacza wymianę uścisków dłoni pomiędzy niektórymi z nich. Teza twierdzenia mówi, że całkowita liczba uściśniętych dłoni jest zawsze parzysta (bo w każdym uścisku biorą przecież udział dwie dłonie).

Ćwiczenie 6

Niech a_i będzie liczbą wierzchołków rzędu *i* ustalonego grafu *G*. Maksymalny rząd wierzchołka w tym grafie wynosi *m*. Ile krawędzi ma ten graf?

Ćwiczenie 7

Narysuj kilka dowolnie wybranych grafów. Sprawdź, ile jest w nich wierzchołków o nieparzystych rzędach. Co zauważyłeś?

Twierdzenie

W każdym grafie liczba wierzchołków rzędu nieparzystego jest parzysta.

Dowód

To twierdzenie można również łatwo uzasadnić. Wiemy że rząd grafu jest liczbą parzystą, a przecież

r(G) = suma rzędów **wszystkich** wierzchołków =
= (suma rzędów wierzchołków **stopnia parzystego**) +
+ (suma rzędów wierzchołków **stopnia nieparzystego**).

Pierwszy składnik tej sumy jest liczbą parzystą, cała suma również, zatem i drugi składnik musi być parzysty. Ten drugi składnik jest sumą liczb nieparzystych. Aby wynik był parzysty, liczba składników (czyli wierzchołków stopnia nieparzystego) musi być parzysta.

Małgorzata Mikołajczyk

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Siedmiu przyjaciół wyjeżdża na wakacje i obiecuje, że każdy z nich wyśle pocztówki trzem spośród pozostałych. Czy może zdarzyć się tak, że każdy z nich dostanie pocztówki od tych, do których sam napisze?

2. Na zebraniu związkowym zgromadzili się członkowie gangów Olsena i Kapone. Każdy z nich rozpoznał w tłumie dokładnie czterech znajomych, ale na pytanie szefów, czy jest na sali ktoś, kto zna kogokolwiek z obcego gangu, zgłosił się tylko Dżony Kufaja i przyznał, że zna jedną taką osobę. Czy gangsterzy byli szczerzy?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Samouczek zadaniowy

Kolorowe grafy

W rozwiązaniu zagmatwanych logicznych łamigłówek często pomaga przejrzysta wizualizacja opisanych w nich obiektów i relacji zachodzących między nimi. Wygodnym narzędziem są grafy, czyli układy punktów, które symbolizują opisane w zadaniu obiekty, połączonych krawędziami symbolizującymi zachodzące między nimi relacje (patrz „O podawaniu rąk" s. 15). Jeśli między obiektami mogą zachodzić różne relacje, wygodnym sposobem ich wizualizacji jest pokolorowanie krawędzi grafu. Użycie kolorów to jeszcze nie rozwiązanie, ale dzięki temu często rozumowanie staje się łatwe. Rozwiążemy kilka zadań tego typu.

Zadanie 1

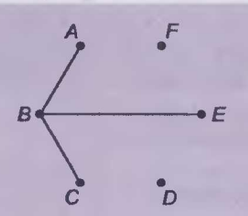
Sześciu uczniów uczestniczy w turnieju szachowym prowadzonym systemem „każdy z każdym". Pokaż, że zawsze jest wśród nich trzech takich, którzy albo już rozegrali ze sobą wszystkie partie, albo nie rozegrali jeszcze żadnej.

Rozwiązanie

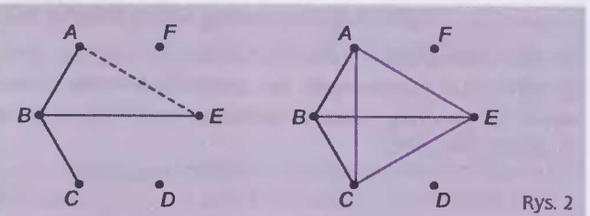
Utwórzmy graf, którego wierzchołki oznaczają uczestników turnieju, i połączmy krawędzią fioletową tych, którzy rozegrali już ze sobą mecz, a czarną – tych, którzy jeszcze ze sobą nie grali. Nasze zadanie sprowadza się do wykazania, że po narysowaniu wszystkich krawędzi grafu o sześciu wierzchołkach i dowolnym pokolorowaniu ich dwoma kolorami zawsze istnieje jednokolorowy trójkąt.

Tak rzeczywiście jest. Zauważmy, że z każdego wierzchołka grafu wychodzą co najmniej trzy krawędzie tego samego koloru (bo 2 krawędzie fioletowe i 2 czarne dawałyby 4 krawędzie, a z każdego wierzchołka wychodzi 5 krawędzi). Wybierzmy pewien wierzchołek i narysujmy wychodzące z niego trzy jednokolorowe krawędzie, np. czarne (rys. 1).

Zastanówmy się, w jaki sposób możemy poprowadzić pozostałe krawędzie pomiędzy wierzchołkami *A*, *B*, *C* i *E*. Jeśli dostawimy chociaż jedną czarną krawędź, to powstanie czarny trójkąt, w przeciwnym wypadku – powstanie trójkąt fioletowy (rys. 2), a to mieliśmy wykazać.



Rys. 1



Rys. 2

Zadanie 2

Czy podobna sytuacja ma miejsce, gdy w turnieju jest pięciu graczy? A jeśli jest ich siedmiu?

Rozwiązanie

Jeśli graf ma liczbę wierzchołków większą lub równą sześć i poprowadzimy w nim wszystkie możliwe krawędzie, a potem pokolorujemy je dwoma kolorami, to z dowolnego wierzchołka będą wychodziły co najmniej trzy krawędzie tego samego koloru. Zatem w takim grafie zawsze jest co najmniej jeden jednokolorowy trójkąt. Przy pięciu wierzchołkach może nie być jednokolorowych trójkątów.

Zadanie 3

Na mapie zaznaczono pięć miast. Wiadomo, że wśród dowolnych trzech istnieją dwa o połączeniu lotniczym i dwa bez takiego połączenia. Pokaż, że:

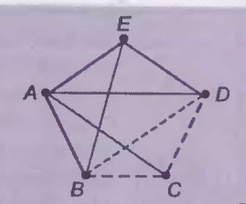
a) każde miasto jest połączone dokładnie z dwoma innymi,

b) wylatując z dowolnego miasta można oblecieć pozostałe i wrócić do punktu startu tak, aby w każdym mieście być tylko jeden raz.

Rozwiązanie

Możemy myśleć, że 5 miast to 5 wierzchołków grafu, w którym poprowadzono wszystkie możliwe krawędzie. Z treści zadania wiemy, że co najmniej jedna z krawędzi łączących dowolnie wybrane trzy wierzchołki jest fioletowa (tzn. istnieje połączenie lotnicze między miastami) i jedna czarna (brak połączenia). W grafie tym nie ma więc jednokolorowego trójkąta. A zatem (patrz zad. 1) z jednego wierzchołka nie mogą wychodzić trzy krawędzie w tym samym kolorze. Ponieważ z każdego wierzchołka takiego grafu wychodzą 4 krawędzie, więc dwie muszą być czarne i dwie fioletowe, co dowodzi punktu a).

Teraz spróbujemy oblecieć wszystkie miasta. Wybierzmy jeden wierzchołek, np. *A*, i wychodzące z niego dwie fioletowe krawędzie. Niech będą to np. *AB* i *AE* (wtedy *AC* i *AD* są czarne). Krawędź *EB* musi być czarna (w przeciwnym wypadku trójkąt *ABC* byłby jednokolorowy). Ale z wierzchołka *E* wychodzi jeszcze jedna krawędź fioletowa. Niech będzie to *ED*. Krawędź *BD* musi być czarna (w przeciwnym razie z wierzchołka *C* wychodziłyby trzy krawędzie czarne), zatem *BC* i *DC* będą fioletowe. Widać więc, że bez przeszkód można odbyć żądaną podróż przez 5 miast.

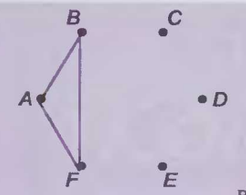


Rys. 3

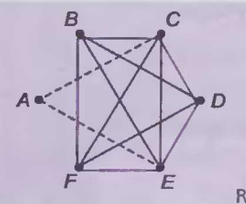
UWAGA! Zauważyliśmy przy okazji, że jeśli graf o 5 wierzchołkach i wszystkich możliwych krawędziach pokolorowanych dwoma kolorami nie zawiera jednokolorowego trójkąta, to można go przedstawić jako pięciokąt o obwodzie w jednym i przekątnych w drugim kolorze.

Zadanie 4

Dowolnych dwóch z sześciu abonentów telefonicznych może ze sobą w danym momencie rozmawiać lub nie. Pokaż, że zawsze można znaleźć dwie trzyosobowe grupy abonentów, w których wszyscy już ze sobą rozmawiali albo nikt z nikim jeszcze nie rozmawiał.



Rys. 4



Rys. 5

Rozwiązanie

Mamy wykazać, że w grafie o sześciu wierzchołkach i wszystkich możliwych krawędziach pokolorowanych dwoma kolorami zawsze znajdziemy dwa jednokolorowe trójkąty (niekoniecznie oba w tym samym kolorze). Wiemy już, że jeden taki trójkąt istnieje (patrz zad. 1). Niech będzie to fioletowy trójkąt *ABF* – rysunek 4. Musimy znaleźć drugi.

Zapomnijmy na chwilę o wierzchołku *A* i rozważmy pięciokąt *BCDEF* wraz z przekątnymi. Jeżeli znajdzie się tam jednokolorowy trójkąt, to zadanie jest rozwiązane. Jeśli nie, to zgodnie z wcześniejszą uwagą, pięciokąt ten ma obwód jednego, a przekątne – drugiego koloru (kolory te możemy ustalić tak, jak na rysunku 5). Dorysujmy teraz krawędzie *AC* i *AE*. Jeśli jedna z nich jest fioletowa, to znajdziemy drugi fioletowy trójkąt (jaki?). Jeśli obie są czarne, to znajdziemy trójkąt czarny (jaki?).

Zadanie 5

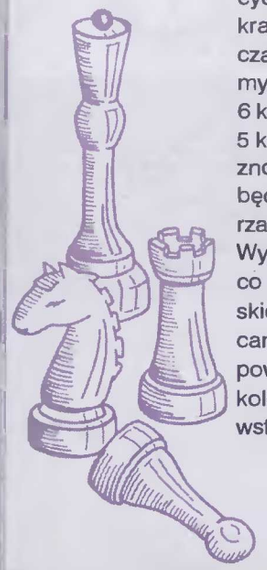
W turnieju szachowym uczestniczy 66 osób. Każdy z każdym rozgrywa jedną partię. Rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Wykazać, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

Rozwiązanie

Zawodników będzie reprezentować 66 punktów na płaszczyźnie, które będziemy łączyć krawędziami czterech kolorów. Krawędź oznacza, że zawodnicy reprezentowani przez połączone nią końce grają ze sobą w mieście reprezentowanym przez określony kolor krawędzi. Zadanie sprowadza się do wykazania, że po poprowadzeniu wszystkich możliwych krawędzi w grafie istnieje pewien jednokolorowy trójkąt.

Wybierzmy jeden wierzchołek. Wychodzi z niego co najmniej 17 krawędzi tego samego koloru, np. czarnych (bo przy 16 krawędziach w każdym z 4 kolorów byłoby ich dopiero 64, a ma być 65). Rozważmy zbiór złożony z punktów będących drugimi końcami tych krawędzi (jest ich co najmniej 17). Jeśli choć jedna krawędź łącząca te punkty będzie czarna, to będzie istniał jednokolorowy trójkąt czarny. A jeśli nie, to mamy trzy kolory i 17 wierzchołków do połączenia. Wybierzmy jeden z tych wierzchołków i zauważmy, że wychodzi z niego co najmniej 6 krawędzi w tym samym kolorze różnym od czarnego – np. niebieskim (bo przy 5 krawędziach w trzech kolorach byłoby ich dopiero 15, a ma być 16). Popatrzmy znowu na drugie końce tych krawędzi. Jest ich 6 i jeśli jakaś krawędź między nimi będzie niebieska, to powstanie niebieski trójkąt. Jeśli nie, to rozumowanie powtarzamy dla tych 6 wierzchołków i dwóch kolorów, jakie pozostały do dyspozycji. Wybierając jeden z tych wierzchołków zauważamy, że muszą wychodzić z niego co najmniej trzy krawędzie w tym samym kolorze różnym od czarnego i niebieskiego – dlaczego?) – np. w czerwonym. Rozważmy trzy wierzchołki będące końcami tych krawędzi. Jeśli choć jedna z łączących je krawędzi będzie czerwona, to powstanie czerwony trójkąt, a jeśli nie, to mając do dyspozycji już tylko jeden kolor i tak utworzymy jednokolorowy trójkąt np. zielony. Zatem zawsze musi powstać jednokolorowy trójkąt, co dowodzi, że teza zadania jest prawdziwa.

Małgorzata Mikołajczyk, Lech Stawikowski



Paryż zaprasza mistrzów

W końcu sierpnia 2004 roku odbędzie się w Paryżu finał XVIII Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych. Eliminacje (dwa etapy korespondencyjne oraz finał krajowy II Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych w dniach 15–16 maja 2004 we Wrocławiu), organizowane przez Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej i Oddział Wrocławski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, wyłonią mistrzów Polski i reprezentację na finał paryski. Zapraszamy miłośników matematyki oraz tych, którym logiczne myślenie sprawia przyjemność i satysfakcję, do udziału w Mistrzostwach.

Więcej informacji dotyczących konkursu (regulamin, zestaw zadań, wzór karty odpowiedzi, numer konta, na które należy wpłacać wpisowe już w I etapie korespondencyjnym) można będzie znaleźć pod koniec września br. na stronie internetowej Komitetu Organizacyjnego Mistrzostw:

http:// www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html

Zawodnicy mogą startować w jednej z ośmiu kategorii:
CE – uczniowie klas III SP (zadania 1–5),
CM – uczniowie klas IV SP (zadania 3–8),
C1 – uczniowie klas V i VI SP (zadania 5–11),
C2 – uczniowie gimnazjów (zadania 7–13),
L1 – uczniowie szkół ponadgimnazjalnych (zadania 7–16),
L2 – studenci i uczniowie szkół pomaturalnych (zadania 7–18),
HC – zawodowi matematycy i informatycy (zadania 7–18),
GP – dorośli, spoza kategorii L2 oraz HC (zadania 7–16).

Kartę odpowiedzi powiększoną do formatu A4 po starannym wypełnieniu nagłówka i wpisaniu rozwiązań we właściwe miejsca należy przesłać wraz z kopią dowodu wpłaty wpisowego (konto będzie podane na stronie internetowej; kategorie CE i CM – 20 zł, C1 i C2 – 30 zł, L1 i L2 – 40 zł, HC i GP – 50 zł) do dnia **15 grudnia 2003** na adres:

Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

z dopiskiem na kopercie KONKURS i podaniem symbolu kategorii. Do przesyłki należy włożyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną ze znaczkiem.

Komitet Organizacyjny Mistrzostw

Zadania I etapu eliminacji 2003/2004

Początek kategorii CE

1. Podział kwadratu. Papierowy kwadrat podzielono na cztery prostokąty. Trzy z nich miały wymiary (wyrażone w centymetrach): 4×6, 5×9 i 2×11. **Jakie wymiary miał czwarty prostokąt?**

2. Pochód. Zosia idzie w pochodzie i ma obok siebie po lewej ręce Małgosię. Dziewczynki wymieniają swoje spostrzeżenia:
– Przed nami są cztery rzędy – mówi Małgosia.
– Za nami maszeruje jeszcze siedem rzędów – mówi Zosia.
– Po mojej lewej stronie są trzy kolumny – mówi Małgosia.
– Po mojej prawej stronie są cztery kolumny – mówi Zosia.
Ile osób bierze udział w pochodzie, jeśli wszystkie rzędy i kolumny są pełne?

Początek kategorii CM

3. Przekładanka. Dziewięć kartoników z liczbami ułożono w trzy rzędy (na rysunku rzędy są ponumerowane). Należy wybrać trzy kartoniki, po jednym z każdego rzędu, i zamienić miejscami tak, aby po tej operacji w każdym rzędzie były nadal trzy kartoniki i aby sumy liczb we wszystkich rzędach były jednakowe. **Podaj w kolejności rosnącej liczby znajdujące się na trzech przemieszczanych kartonikach.**

I	2	3	13
II	5	6	7
III	10	12	11

nierównością daje nierówność podwójną: $\frac{1}{5}\cdot 6 \le \frac{1}{5}a_1 < a_2$, skąd wynika: $8\frac{2}{5} < a_2$.

Ponieważ a_2 jest liczbą naturalną, możemy napisać $9 \le a_2$.

Wiemy więc już, że $a_1 \ge 6$ i $a_2 \ge 9$.

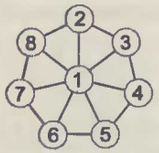
4. Soki z automatu. W automacie można kupić soki w kartonikach. Każdy kartonik soku kosztuje 1 zł. Automat przyjmuje monety o nominałach: 1 gr, 2 gr, 5 gr, 10 gr, 20 gr, 50 gr i 1 zł. Po wrzuceniu monet i naciśnięciu przycisku automat wyrzuca pojedynczy kartonik albo zwraca wszystkie monety, jeśli suma ich nominałów jest za duża albo za mała. Ola ma w portmonetce monety o nominałach mniejszych od 1 zł, a ich suma przekracza 1 zł, jednak w tym automacie nie może kupić soku. **Ile najmniej, a ile najwięcej groszy Ola może mieć w portmonetce?**

Początek kategorii C1

5. Wiek uczniów. Na początku ubiegłego roku szkolnego suma lat wszystkich uczniów w klasie Waldka była równa 304. Wszyscy przeszli do następnej klasy i na początku bieżącego roku szkolnego suma lat tych samych uczniów była równa 336. Waldek jest najmłodszy w klasie, a najstarszy – Romek – jest od niego o rok starszy. Wiek uczniów wyrażamy całkowitą liczbą lat. **Ile lat na początku bieżącego roku szkolnego miał Waldek oraz ilu uczniów w klasie było w jego wieku?**

Koniec kategorii CE

6. Orły z reszek. Osiem monet ułożono tak, że jedna znalazła się w środku siedmiokąta, a pozostałe w jego wierzchołkach (patrz rysunek). Wszystkie monety mają odkryte reszki, a po wykonaniu zadania monety powinny pozostać na swoich miejscach, lecz z odkrytymi orłami. W tym celu wykonujemy kolejne operacje odwracania. W jednej operacji odwracamy zawsze trzy monety położone w trzech kolejnych wierzchołkach siedmiokąta (np. 7, 8 i 2) albo trzy monety, z których dwie położone są w sąsiednich wierzchołkach, a trzecia w środku siedmiokąta (np. 1, 2 i 3). Operacje te można wykonywać wielokrotnie, przy czym pewne monety mogą być odwracane kilka razy. **Jaka najmniejsza liczba operacji odwracania pozwala wykonać postawione zadanie?**



Początek kategorii C2, L1, L2, GP, HC

7. Bracia i ich owce. W górskiej wiosce mieszka kilku braci, którzy zajmują się hodowlą owiec. Razem mają 2004 owce, a liczby owiec w ich stadach tworzą ciąg kolejnych liczb naturalnych. Najmłodszy z braci ma najwięcej owiec i ich liczba jest parzysta. **Ile owiec ma najmłodszy z braci?**

8. Wybory do samorządu. Spośród trojga uczniów, których imiona umieszczono na kartach wyborczych, ma być wybrana dwuosobowa reprezentacja do samorządu szkoły. Głos jest ważny, jeśli na karcie wyborczej pozostały nieskreślone dokładnie dwa imiona. W wyborach oddano 37 głosów i wszystkie były ważne. Ania otrzymała o 10 głosów więcej niż Bernard i o 12 głosów więcej niż Celina. **Na ilu kartach wyborczych było skreślone imię Ani?**

Koniec kategorii CM

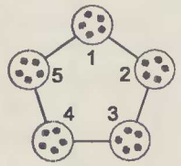
9. W bibliotece. Na półce ustawiono w rzędzie 9 książek. Najdroższa znalazła się na miejscu środkowym. Jej cena wyrażała się całkowitą liczbą złotych. Wszystkie książki ustawiono tak, że ceny każdych dwóch książek stojących obok siebie różniły się o 1 zł. Łączna wartość tych dziewięciu książek wynosiła 108 zł. **Ile kosztowała najtańsza książka z tej półki?**

10. Huczne urodziny. Na przyjęciu urodzinowym emerytowanego kapitana Żeglugi Wielkiej zebrała się niemal cała rodzina i liczni przyjaciele. Były tam trzy córki kapitana, siedmiu wnuków i pięciu siostrzeńców. Najmłodszy z wnuków zauważył ze zdziwieniem, że obecne lata córek dziadka, to 3 kolejne liczby naturalne; lata jego siostrzeńców to 5 kolejnych liczb naturalnych, a także lata jego wnuków to 7 kolejnych liczb naturalnych. Nadzwyczajne było to, że suma lat córek była równa sumie lat siostrzeńców i równa sumie lat wnuków, a obecny wiek dziadka stanowi dwie trzecie sumy lat jego córek. **Ile lat miał w tym uroczystym dniu kapitan, a ile jego najmłodszy wnuk?**

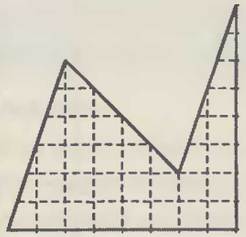
11. Bliźniaki. Kuba jest o 4 lata starszy od Marka i o 8 lat starszy od Damiana. Iloczyn lat Marka i Pawła jest o 16 większy od iloczynu lat Kuby i Damiana. W tej czwórce chłopców są bliźniaki. **Podaj w kolejności alfabetycznej imiona bliźniaków.**

Koniec kategorii C1

12. Orzechowy przekładaniec. Na pięciu talerzykach ustawionych w koło rozmieszczono 25 orzechów, po 5 na każdym talerzyku (patrz rysunek). Rozmieszczenie orzechów można zmieniać wykonując operację przekładania, tzn. wybierając jakiś talerzyk, na którym znajdują się co najmniej 2 orzechy, i przekładając po jednym orzechu na dwa sąsiednie talerzyki (np. w sytuacji z rysunku moglibyśmy z talerzyka o numerze 2 przełożyć po jednym orzechu na talerzyki o numerach 1 i 3). Zadanie będzie wykonane, gdy, po pewnej liczbie operacji przekładania, na talerzyku nr 1 będzie jeden orzech, a na następnych talerzykach, posuwając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, będzie kolejno 3, 5, 7 i 9 orzechów. **Jaką najmniejszą liczbę operacji przekładania trzeba wykonać, aby otrzymać takie rozmieszczenie orzechów i ile operacji przekładania wykonamy w tym przypadku z talerzyka nr 1, a także z talerzyków nr 2, nr 3, nr 4 i nr 5?**



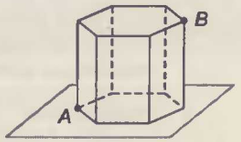
13. Podział figury. Figurę pokazaną na rysunku należy podzielić na dwie identyczne części dające się na siebie nałożyć bez odwracania. **Podział zaznaczyć pogrubioną linią ciągłą.**



Koniec kategorii C2

14. Nieznany wielomian. Wielomian $W(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x spełnia warunek $x \cdot W(x-1) = (x-2) \cdot W(x)$ oraz $W(3) = 6$. **Znajdź $W(\sqrt{3})$.**

15. Mrówka na graniastosłupie. Na stole ustawiono graniastosłup prosty o wysokości $h = 16$ cm, którego podstawą jest sześciokąt foremny o boku $a = 12$ cm. Mrówka znajduje się na stole przy wierzchołku A i zamierza najkrótszą drogą po dostępnej powierzchni graniastosłupa dotrzeć do punktu B (patrz rysunek). **Jaka jest, w centymetrach, dokładna długość tej drogi?**



16. Gra w żetony. Do trzech pudełek włożono 309 żetonów: do pudełka A włożono 101, do pudełka B – 103, a pozostałe do pudełka C. W grze bierze udział dwóch graczy, którzy wykonują ruchy na przemian. Każdy może wybrać niepuste pudełko i jeśli zawiera ono n żetonów, to może wyjąć z niego nie więcej niż $\sqrt{n}$ żetonów, ale musi jednak wziąć co najmniej 1 żeton. Wyjęte żetony nie biorą udziału w dalszej grze. Wygrywa ten gracz, który jako pierwszy opróżni jedno z pudełek. **Czy gracz wykonujący pierwszy ruch ma strategię wygrywającą? W karcie odpowiedzi wpisz „TAK" lub „NIE". W przypadku odpowiedzi „TAK" podaj liczbę ruchów, którymi gracz może rozpocząć zwycięską grę. Jeśli tych ruchów jest więcej niż jeden, podaj dwa z nich.**

Koniec kategorii L1, GP

17. Tajemnicza liczba. Liczba n ma tę własność, że wśród dowolnie wybranych n liczb naturalnych znajdą się dwie, których suma lub różnica jest podzielna przez 111. **Jaka jest najmniejsza liczba n o tej własności?**

18. Suma reszt. Liczba nieparzysta p jest liczbą pierwszą. Dla każdej liczby $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$ wyznaczamy resztę r_k z dzielenia liczby k^p przez p^2. **Ile wynosi suma tak otrzymanych reszt?**

Koniec kategorii L2, HC

powstanie czerwony trójkąt, a jeśli nie, to mając do dyspozycji już tylko jeden kolor i tak utworzymy jednokolorowy trójkąt np. zielony. Zatem zawsze musi powstać jednokolorowy trójkąt, co dowodzi, że teza zadania jest prawdziwa.

Małgorzata Mikołajczyk, Lech Stawikowski

nierównością daje nierówność podwójną: $\frac{l}{5} \cdot 6 \le \frac{l}{5} a_1 < a_2$, skąd wynika: $8\frac{2}{5} < a_2$.

Ponieważ a_2 jest liczbą naturalną, możemy napisać $9 \le a_2$.

Wiemy więc już, że $a_1 \ge 6$ i $a_2 \ge 9$.

Karta odpowiedzi XVIII MM w GMiL (I etap 2003/2004)

imię i nazwisko, kategoria .....

adres, telefon, e-mail .....

szkoła, klasa / uczelnia, wydział, rok studiów / zawód .....

numer zadania	rozwiązania	punkty	współczynnik
1	____ cm × ____ cm		
2	Liczba osób w pochodzie: ____		
3	____ ____ ____		
4	Najmniejsza suma: ____ groszy. Największa suma: ____ groszy.		
5	Wiek Waldka: ____ lat. Liczba uczniów w wieku Waldka: ____		
6	Najmniejsza liczba operacji: ____		
7	Liczba owiec w stadzie najmłodszego z braci: ____		
8	Imię Ani skreślono na ____ kartach.		
9	Cena najtańszej książki: ____ zł.		
10	Wiek kapitana: ____ lat. Wiek najmłodszego wnuka: ____ lat.		
11	Imiona bliźniaków: ____, ____		
12	Najmniejsza liczba operacji przekładania: ____ nr talerzyka: 1 2 3 4 5 liczba operacji:		
13	Podział figury zaznaczyć starannie pogrubioną linią ciągłą.		
14	$W(\sqrt{3}) =$ ____		
15	____ cm		
16	Czy rozpoczynający ma strategię wygrywającą? ____ Liczba możliwych ruchów rozpoczęcia: ____ Z pudełka ____ wybiera ____ żetony(nów). Z pudełka ____ wybiera ____ żetony(nów).		
17	Najmniejsze n: ____		
18	$\sum_{k=1}^{p-1} r_k =$ ____		
	suma		

powstanie czerwony trójkąt, a jeśli nie, to mając do dyspozycji już tylko jeden kolor i tak utworzymy jednokolorowy trójkąt np. zielony. Zatem zawsze musi powstać jednokolorowy trójkąt, co dowodzi, że teza zadania jest prawdziwa.

Małgorzata Mikołajczyk, Lech Stawikowski

Rozmaitości z rozwiązaniami

Dziś dwa zadania, które nie są może najłatwiejsze, ale za to można je rozwiązać bez żadnej wiedzy matematycznej i bez wykonywania jakichkolwiek rachunków. Centralną rolę w matematyce pełnią nie definicje i rachunki, jak sądzi wielu, ale logiczne, dedukcyjne rozumowanie. Niestety w nauczaniu szkolnym niewiele jest zadań kształcących właśnie taką umiejętność.

Zadanie 1. Oszczędności uczniów

Dziesięciu uczniów gromadziło w skarbonkach oszczędności. Każdy z nich zebrał całkowitą liczbę złotych. Chłopcy porównali swoje oszczędności i okazało się, że żadna z kwot nie była mniejsza niż 6 zł ani większa niż 152 zł. Najdziwniejsze było jednak to, że żaden z ilorazów dwóch dowolnie wybranych kwot nie należał do przedziału $\left[\frac{5}{7}, \frac{7}{5}\right]$. Ponadto okazało się, że:

- Heniek i Gaweł mają razem 57 zł;
- Bolek ma mniej pieniędzy od Irka, a Irek od Alberta;
- Celestyn ma dokładnie o 75 zł więcej od Janka, a Damian o 80 zł więcej niż Franciszek;
- Irek, Heniek i Ernest mają w sumie tyle oszczędności, co Gaweł.

Sporządź imienną listę oszczędności chłopców.

Rozwiązanie

Liczby oznaczające oszczędności chłopców oznaczmy symbolami $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ i ustawmy w kolejności niemalejącej, tzn. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \ldots \le a_9 \le a_{10}$. Z treści zadania wiemy, że $6 \le a_1$ oraz $a_{10} \le 152$. Wiemy też, że iloraz dowolnie wybranej kwoty większej przez mniejszą jest większy niż $\frac{7}{5}$, a dowolnie wybranej kwoty mniejszej przez większą jest mniejszy niż $\frac{5}{7}$.

W szczególności, ponieważ $a_1 \le a_2$, mamy: $\frac{7}{5} < \frac{a_2}{a_1}$, czyli $\frac{7}{5}a_1 < a_2$. Mnożąc obie strony nierówności $6 \le a_1$ przez $\frac{7}{5}$ otrzymamy $\frac{7}{5} \cdot 6 \le \frac{7}{5}a_1$, co razem z poprzednią nierównością daje nierówność podwójną: $\frac{7}{5} \cdot 6 \le \frac{7}{5}a_1 < a_2$, skąd wynika: $8\frac{2}{5} < a_2$.

Ponieważ a_2 jest liczbą naturalną, możemy napisać $9 \le a_2$.

Wiemy więc już, że $a_1 \ge 6$ i $a_2 \ge 9$.

Dalej postępujemy podobnie. Z nierówności $\frac{7}{5} < \frac{a_3}{a_2}$ otrzymujemy $\frac{7}{5}a_2 < a_3$. To wraz z nierównością $\frac{7}{5}\cdot 9 \le \frac{7}{5}a_2$ daje nierówność podwójną $\frac{7}{5}\cdot 9\,\frac{7}{5}\cdot 9a_2 < a_3$. Wynika z niej, że $12\frac{3}{5} < a_3$, a uwzględniając, że a_3 jest naturalne mamy $a_3 \ge 13$. Kontynuując to postępowanie otrzymamy nierówności:

$$a_1 \ge 6,\ a_2 \ge 9,\ a_3 \ge 13,\ a_4 \ge 19,\ a_5 \ge 27,\ a_6 \ge 38,$$
$$a_7 \ge 54,\ a_8 \ge 76,\ a_9 \ge 107 \text{ i } a_{10} \ge 150.$$

W ten sposób wszystkie niewiadome kwoty oszacowaliśmy z dołu (określiliśmy, od jakich liczb na pewno nie są mniejsze). Teraz oszacujemy te kwoty z góry (określimy, od jakich liczb na pewno nie są większe).

Z treści zadania wiemy, że żadna z liczb nie przekracza 152. W szczególności $a_{10} \le 152$. Wiemy też, że $\frac{a_9}{a_{10}} < \frac{5}{7}$, co daje $a_9 < \frac{5}{7}a_{10}$. Mnożąc obie strony nierówności $a_{10} \le 152$ przez $\frac{5}{7}$ otrzymujemy $\frac{5}{7}a_{10} \le \frac{5}{7}\cdot 152$, co razem z poprzednią nierównością daje nierówność podwójną: $a_9 < \frac{5}{7}a_{10} \le \frac{5}{7}\cdot 152$. Wynika stąd, że $a_9 < 108\frac{4}{7}$, a uwzględniając, że jest to liczba naturalna, mamy $a_9 \le 108$. Dalej postępujemy analogicznie i otrzymujemy:

$$a_{10} \le 152,\ a_9 \le 108,\ a_8 \le 77,\ a_7 \le 54,\ a_6 \le 38,$$
$$a_5 \le 27,\ a_4 \le 19,\ a_3 \le 13,\ a_2 \le 9,\ a_1 \le 6.$$

Zestawiając teraz otrzymane dwa ciągi nierówności (oszacowań górnych i dolnych) otrzymujemy ciąg nierówności podwójnych:

$$6 \le a_1 \le 6,\ 9 \le a_2 \le 9,\ 13 \le a_3 \le 13,\ 19 \le a_4 \le 19,\ 27 \le a_5 \le 27,$$
$$38 \le a_6 \le 38,\ 54 \le a_7 \le 54,\ 76 \le a_8 \le 77,\ 107 \le a_9 \le 108,\ 150 \le a_{10} \le 152.$$

Dzięki temu mamy jednoznacznie wyznaczone siedem najniższych kwot: $a_1 = 6$, $a_2 = 9$, $a_3 = 13$, $a_4 = 19$, $a_5 = 27$, $a_6 = 38$, $a_7 = 54$. Kwota a_8 może wynosić 76 lub 77, a_9 to 107 lub 108, a najwyższa kwota, a_{10} może być jedną z liczb 150, 151 lub 152.

Rozpatrzmy więc kilka przypadków:

a) $a_8 = 76$ i $a_9 = 107$, wtedy a_{10} może wynosić 150, 151 lub 152;

b) $a_8 = 76$ i $a_9 = 108$, wtedy z nierówności $\frac{a_{10}}{108} > \frac{7}{5}$ wynika, że $a_{10} > 151\frac{1}{5}$, zatem $a_{10} = 152$;

c) $a_8 = 77$, wtedy z nierówności $\frac{a_9}{77} > \frac{7}{5}$ wynika, że $a_9 > 107\frac{4}{5}$, zatem $a_9 = 108$, a wtedy $a_{10} = 152$.

Otrzymaliśmy więc pięć możliwych ciągów dziesięciowyrazowych. Dla porządku wypiszmy je:

1) 6, 9, 13, 19, 27, 38, 54, 76, 107, 150;
2) 6, 9, 13, 19, 27, 38, 54, 76, 107, 151;
3) 6, 9, 13, 19, 27, 38, 54, 76, 107, 152;
4) 6, 9, 13, 19, 27, 38, 54, 76, 108, 152;
5) 6, 9, 13, 19, 27, 38, 54, 77, 108, 152.

Wskazówki i odpowiedzi do 5-10-15-20: 5) 4, 10) Zależy, czy mówi to chłopiec, czy dziewczynka. 15) Filip ma 3 lata. 20) Mogły to być np. truciaczki.

Ich wyrazy są nie mniejsze od 6 i nie większe od 152, a ilorazy kolejnych wyrazów są mniejsze od $\frac{5}{7}$ lub większe od $\frac{7}{5}$. Ale nie skorzystaliśmy jeszcze ze wszystkich warunków zadania. One pomogą nam wskazać właściwy ciąg. To, jak szybko uda się pewne ciągi wyeliminować, zależy od tego, który z pozostałych warunków wybierzemy jako pierwszy do eliminacji.

Zacznijmy od tego, że Celestyn ma o 75 zł więcej od Janka. Przyjrzyjmy się ciągowi nr 1. Gdyby Celestyn miał 150 zł, to Janek miałby 75, a takiego wyrazu w tym ciągu nie ma. Gdyby Celestyn miał 107 zł, to Janek 32 zł, co też nie zgadza się z ciągiem. Pozostałych kwot sprawdzać nie trzeba (dlaczego?). Widać, że ciąg nr 1 możemy wykluczyć z dalszych rozważań. Teraz weźmy pod uwagę ciąg nr 2. Jeśli Celestyn ma 151 zł, to Janek 76 zł, co jest wyrazem tego ciągu. Zatem rozpatrywany warunek tego ciągu nie wyklucza. Podobnie sprawdzamy pozostałe ciągi. Okazuje się, że rozważany warunek wyklucza jeszcze ciąg trzeci i czwarty, ale nie wyklucza piątego.

Jako kolejny warunek wybieramy ten, że Damian ma o 80 zł więcej niż Franciszek. W przypadku ciągu nr 2 Damian nie może mieć 151 zł (bo tyle ma Celestyn), a jeśli ma 107 zł, to Franciszek ma 27 zł, a ta liczba jest wyrazem ciągu nr 2. Ciąg ten przeszedł próbę pomyślnie. Podobne sprawdzenie wyklucza ciąg nr 5.

Pozostał nam zatem tylko ciąg nr 2. Ponadto czterem chłopcom potrafimy już przypisać zaoszczędzone kwoty: Celestyn ma 151 zł, Damian – 107 zł, Janek – 76 zł i Franciszek – 27 zł. Zapiszmy nasze dotychczasowe ustalenia w tabelce:

kwota	6	9	13	19	27	38	54	76	107	151
imię					F			J	D	C

Korzystając z pozostałych warunków zadania dokończymy wypełnianie tabelki. Od którego warunku teraz zacząć? Nie ma na to recepty. Decyduje tu zdrowy rozsądek, a on podpowiada, by wybrać warunek, zgodnie z którym Heniek i Gaweł mają razem 57 zł. Łatwo będzie sprawdzić, które „wolne" liczby w tabelce sumują się do 57 zł. Gdybyśmy wybrali np. warunek „Irek, Heniek i Ernest mają w sumie tyle oszczędności, co Gaweł", musielibyśmy znaleźć spośród sześciu cztery takie liczby, że suma trzech z nich daje czwartą, a to byłoby bardzo pracochłonne. Wróćmy zatem do warunku „Heniek i Gaweł mają razem 57 zł". Najwyższa kwota, jaka nam pozostała, to 54, ale ona nie może być składnikiem tej sumy (dlaczego?). Jeśli byłoby to 38, to drugi składnik wyniósłby 19. Żadna inna suma pozostałych wyrazów ciągu nie da 57 (dlaczego?). Z tego wynika, że albo Heniek ma 38 zł, a Gaweł 19, albo jest na odwrót. Pomoże nam teraz warunek Irek, Heniek i Ernest mają w sumie tyle oszczędności, co Gaweł (co możemy zapisać krócej I + H + E = G). Wynika stąd, że Gaweł musi mieć więcej pieniędzy niż Heniek. Uzupełniamy więc tabelkę:

kwota	6	9	13	19	27	38	54	76	107	151
imię				H	F	G		J	D	C

Teraz możemy na powyższy warunek spojrzeć inaczej. Mówi on, że I + 19 + E = 38, zatem Irek i Ernest mają razem 38 – 19 = 19 zł. Do tego wyniku pasują jedynie kwoty 6 zł i 13 zł. Zatem albo Irek ma 6 zł, a Ernest 13 zł, albo jest na odwrót.

W rozstrzygnięciu tego pomoże nam kolejny warunek, który stwierdza, że Bolek ma mniej pieniędzy od Irka. Irek nie może więc mieć 6 zł. Ma 13 zł, a Bolek musi mieć 9 zł. Pozostała jedna kwota wolna 54 zł i muszą to być oszczędności Alberta, co spełnia ostatni warunek: Irek ma mniej pieniędzy od Alberta. Mamy zatem ostateczne rozwiązanie:

kwota	6	9	13	19	27	38	54	76	107	151
imię	E	B	I	H	F	G	A	J	D	C

Zadanie 2. Drogocenna perła

Na stole jest 12 ponumerowanych pudełek, a na każdym z nich znajduje się napis. Niektóre napisy są prawdziwe, a inne nie. Niektóre pudełka są puste, w innych są ziarna bobu, a w jednym jest drogocenna perła. Wiadomo, że każdy napis dotyczący zawartości pudełka, na którym się znajduje, jest niezgodny z prawdą, a perła jest w pudełku, na którym jest napis prawdziwy. Pudełko o numerze X jest puste. Pudełka wyglądają tak:

I To pudełko jest puste.

II Napis na pudełku IV jest niezgodny z prawdą.

III Perła jest w pudełku z numerem parzystym.

IV Napis na pudełku I jest niezgodny z prawdą.

V Napis na pudełku XII jest niezgodny z prawdą.

VI W tym pudełku jest ziarno bobu.

VII Napis na pudełku III jest zgodny z prawdą.

VIII Napis na pudełku V jest niezgodny z prawdą.

IX Napis na pudełku VII jest zgodny z prawdą.

X Napis na pudełku VIII jest niezgodny z prawdą.

XI W tym pudełku jest ziarno bobu.

XII Napis na pudełku III jest niezgodny z prawdą.

Wskaż (nie dotykając pudełek), w którym znajduje się perła. Co jest w pudełku nr I?

Rozwiązanie

Umówmy się, że jeśli napis na danym pudełku jest prawdziwy, przy numerze tego pudełka wpiszemy „1", a jeśli jest fałszywy – „0".

Z treści wiemy, że każdy napis dotyczący pudełka, na którym się znajduje, jest niezgodny z prawdą. Fałszywe są więc napisy na pudełkach I, VI oraz XI. Zanotujmy to w postaci tabelki:

nr pudełka	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
prawdziwość napisu	0					0					0	

Teraz łatwo zauważyć, że napis na pudełku IV jest prawdziwy, a na pudełku II – fałszywy (dlaczego?). Odnotujmy to w naszej tabelce.

nr pudełka	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
prawdziwość napisu	0	0		1		0					0	

Pozostało jeszcze siedem napisów. Żaden z nich nie dotyczy ani zawartości pudełka, na którym się znajduje, ani napisów na pudełkach I, II, IV, VI, XI, o których wiemy, czy są prawdziwe, czy nie. Wydaje się więc, że znaleźliśmy się w sytuacji bez wyjścia i rozwiązanie zadania jest niemożliwe. Matematyk nie rozkłada jednak bezradnie rąk. Po prostu zakłada, że jeden z napisów na pozostałych pudełkach jest prawdziwy, i patrzy, co z tego założenia wynika. My też tak postąpimy.

Taką metodę nazywa się **wnioskowaniem z przypuszczenia**. Może ona doprowadzić do sprzeczności (wtedy prawdziwe musi być zaprzeczenie założenia, bo innej możliwości nie ma) lub do znalezienia jednego z możliwych rozwiązań (inne możemy otrzymać, jeśli zbadamy zaprzeczenie założenia).

Załóżmy np., że napis na pudełku VIII jest zgodny z prawdą. Po jego odczytaniu widać, że napis na pudełku V jest fałszywy, a to z kolei pociąga, że na pudełku XII mamy napis prawdziwy. Z tego dalej wynika, że napis na pudełku III jest fałszywy. Możemy uzupełnić te dane w tabelce:

nr pudełka	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
prawdziwość napisu	0	0	0	1	0	0		1			0	1

Pozostała nam jeszcze do ustalenia prawdziwość zapisów na pudełkach VII, IX i X. Zacznijmy od pudełka VII. Ten napis jest nieprawdziwy (dlaczego?). Dalej już łatwo wypełnić tabelkę do końca. Ostatecznie wygląda ona tak:

nr pudełka	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
prawdziwość napisu	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Wróćmy do napisu z pudełka III. Mówił on, że perła jest w pudełku o numerze parzystym, ale jako że napis ten jest niezgodny z prawdą, perła musi być w pudełku nieparzystym (mogłoby też jej nie być nigdzie – wtedy napis na pudełku III też jest fałszywy, ale taka sytuacja jest niezgodna z warunkami zadania). Zatem pozostaje nam ustalić, w którym z sześciu pudełek o nieparzystych numerach jest perła. Z treści zadania wiemy, że jest ona w pudełku, na którym napis jest prawdziwy, a z naszych rozważań wynika, że na pudełkach nieparzystych napisy są fałszywe. I co teraz?

Doszliśmy do sprzeczności z warunkami zadania (ustaliliśmy, że perła jest w pudełku o numerze nieparzystym, a jednocześnie pokazaliśmy, że nie może jej tam być). Pamiętajmy jednak, że nasze rozumowanie było od pewnego miejsca względne. Nie wiedzieliśmy przecież, czy napis na pudełku VIII jest prawdziwy, i tylko założyliśmy, że tak, więc i nasze końcowe ustalenia są prawdziwe pod warunkiem, że napis ten jest prawdziwy. Tak jednak być nie może, bo perły nie byłoby wtedy w żadnym pudełku, co jest niemożliwe. Zauważcie, że to nie nasze rozumowanie było błędne. Rozumowanie było poprawne, błędne było tylko założenie. Zatem napis VIII musi być fałszywy.

Prawdziwość napisów na pudełkach I, II, IV, VI i XI ustaliliśmy bezwarunkowo. Powróćmy więc do naszej tabelki i zaznaczmy w niej, że napis VIII jest fałszywy (jeśli

i to założenie doprowadzi nas do sprzeczności, to znaczy, że warunki opisane w zadaniu w ogóle nie mogą być spełnione).

nr pudełka	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
prawdziwość napisu	0	0		1		0		0			0	

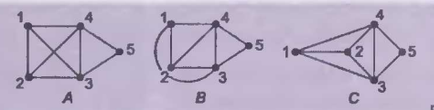
Czytając napis na pudełku VIII widzimy, że napis V jest prawdziwy, na pudełku XII – fałszywy, a na pudełku III prawdziwy. Czytamy teraz napis na pudełku VII, który musi być prawdą, i rozstrzygamy jeszcze prawdziwość napisów IX i X. Całość nanosimy do tabelki:

nr pudełka	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
prawdziwość napisu	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0

Wróćmy znowu do napisu na pudełku III. Tym razem jest on prawdziwy i perła musi być w pudełku o numerze parzystym. Jednocześnie jednak napis na tym pudełku musi być prawdziwy. Warunki te spełniają tylko pudełka IV i X, ale to z numerem X jest przecież puste (wiemy to z treści zadania), zatem perły trzeba szukać w pudełku IV. A czy potrafisz powiedzieć, co jest w pudełku I?

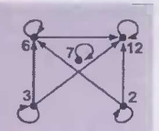
Eugeniusz Sikorski

Odpowiedzi do artykułu *O podawaniu rąk*



Rys. 1

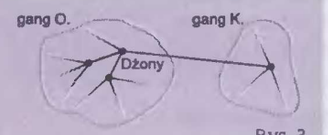
Ćwiczenie 1. Przy odpowiednim ponumerowaniu wierzchołków możemy przekonać się, że grafy *A*, *B*, *C* są takie same (rys. 1).


Rys. 2

Ćwiczenie 2. Jedno z możliwych rozwiązań przedstawia rys. 2. Żaden wierzchołek nie może reprezentować „1" (strzałki **do** wszystkich), ani „0" (brak pętli, strzałki **ze** wszystkich). Graf relacji podzielności jest skierowany, ma pętle w każdym wierzchołku poza 0, nie zawiera jednokierunkowych trójkątów.

Ćwiczenie 3. $r(G) = 6n$ ($2n$ wierzchołków rzędu 3), $r(O) = 4n$ (n wierzchołków rzędu 3 i jeden rzędu n), r(siatka O) = $6n$, r(siatka G) = $10n - 2$ i rzędy te nie zależą od wyboru siatki.

Ćwiczenie 6. $K = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ma_m)$.



Rys. 3

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Otrzymalibyśmy graf o 7 wierzchołkach rzędu 3, a to jest niemożliwe.

2. Graf reprezentujący tę sytuację przedstawia rys. 3. Po usunięciu z grafu wyróżnionej krawędzi (bez usuwania wierzchołków) otrzymalibyśmy dwa grafy o nieparzystych rzędach, co jest niemożliwe.

Z życia liczb

I co dalej?

W testach na inteligencję i zadaniach łamigłówkowych często pojawia się problem przedłużenia ciągu liczb całkowitych na podstawie obserwacji jego początkowego odcinka (zob. [1], [6]). Należy podać zasadę konstrukcji ciągu i kilka następnych wyrazów. Pytania tego rodzaju mogą irytować matematyków, ponieważ na pytanie „co dalej?" nie ma jednoznacznej odpowiedzi. Każdy początkowy odcinek ciągu liczb całkowitych może być przedłużany na nieskończenie wiele sposobów.

Przykład 1

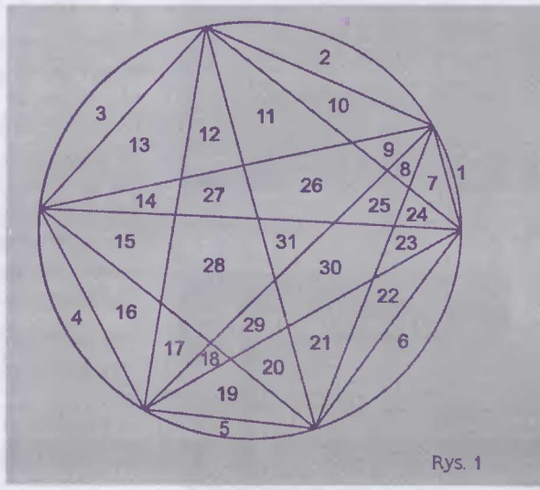
Na pytanie: „Jaki jest następny wyraz w ciągu (3, 5, 7, ...)?" można odpowiedzieć zarówno 9 (kolejne liczby nieparzyste różne od 1), jak i 11 (kolejne liczby pierwsze różne od 2).

Przykład 2

Kolejnym wyrazem ciągu (2, 4, 8, 16, ...) może być 32 (kolejne potęgi dwójki), lecz także 31. Dlaczego?

Umieśćmy na obwodzie koła n punktów ($n \geq 2$), połączmy każde dwa z nich cięciwą i policzmy największą liczbę obszarów, na jakie te cięciwy mogą podzielić koło. Można łatwo sprawdzić, że dla $n = 2, 3, 4$ i 5 otrzymamy właśnie 2, 4, 8 i 16 obszarów, natomiast dla $n = 6$ otrzymamy 31 obszarów (rys. 1).

A jaki będzie kolejny wyraz w tak zdefiniowanym ciągu?


Rys. 1

Przykład 3

W jednym z numerów czasopisma *Matematyka* [6] Krzysztof Omiljanowski zadał pytanie: „Jaki jest »przepis« na ciąg (1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 10, ...)?". Zaproponowano dwie odpowiedzi [5]:

A) (1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 10, 6, 11, 10, 12, 11, 13, 12, ...)
według przepisu: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + 1$ zapisane w systemie pozycyjnym o podstawie siedem dla $n > 2$;

B) (1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 10, 6, 11, 7, 12, 8, 13, 9, ...)
według przepisu: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = \begin{cases} n & \text{dla } n = 10k,\ k \in \mathbb{N}, \\ a_{n-2} + 1 & \text{dla pozostałych } n. \end{cases}$

Oczywiście można zaproponować jeszcze inne przepisy, np:

C) (1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 10, 11, 15, 21, 26, ...)

według przepisu: : $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = \begin{cases} a_{n-2}+1 & \text{dla } n \le 9, \\ a_{n-2}+a_{n-3} & \text{dla } n > 9. \end{cases}$

Leonardo z Pizy zwany Fibonaccim (co znaczy syn Bonacciego) żył w latach ok. 1180–1250. Jako kupiec podróżował po krajach Wschodu, gdzie poznał matematykę hinduską i arabską. Po powrocie to, czego się nauczył, spisał w księgach *Liber abaci* (zasady arytmetyki, rachunków pisemnych, równania 1. i 2. stopnia) i *Practica geometriae* (zastosowanie równań do geometrii).

Przykład 4

Następnym wyrazem ciągu (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) może być liczba 21. Zasada konstrukcji kolejnych wyrazów jest prosta: dodajemy dwa poprzednie wyrazy. Można to zapisać jako: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n > 2$. Jest to dobrze znany ciąg Fibonacciego, który ma wiele interesujących własności oraz ważnych zastosowań praktycznych, nawet w inżynierii finansowej (zob. [1], [2], [4], [7], [10], [11]).

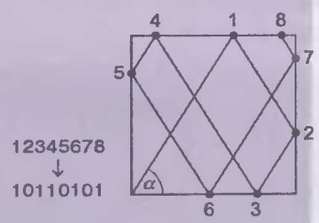
Przykład 5

Weźmy pod uwagę ciąg tworzony z cyfr 0 i 1: (1, 10, 101, 10110, 10110101, 1011010110110, ...).

Jaka jest zasada jego konstrukcji? Zaczynamy od jedynki i co dalej?

A) Kolejny wyraz powstaje przez zamianę „1" na „10" i „0" na „1" w wyrazie poprzednim.

B) Wyraz a_n powstaje z dopisanie do wyrazu a_{n-1} wyrazu a_{n-2}.



Rys. 2

Czy te zasady pasują do podanego ciągu? Czy opisują ten sam ciąg? Odnotujmy jeszcze jedną interesującą interpretację tego ciągu. Rozważmy kwadratowy stół bilardowy. W jednym wierzchołku umieszczamy bilę i wprawiamy ją w ruch. Zauważmy, że tor ruchu bili jest zdeterminowany i zależy tylko od kąta α. Odbicie od bandy poziomej oznaczmy cyfrą 1, a od pionowej – cyfrą 0 (rys. 2). Wyrazami ciągu niech będą zapisy coraz dłuższych serii odbić. Opisany wyżej ciąg otrzymamy dla kąta α, którego tangens jest równy liczbie złotej, biorąc serie o długościach będących liczbami Fibonacciego.

Na podstawie kilku początkowych wyrazów nie zawsze łatwo jest znaleźć jakąś regułę opisującą cały ciąg.

Przykład 6

Jaki jest następny wyraz ciągu: $1^1, 9^2, 8^3, 7^4, 28^5, 18^6, \ldots$?

Odpowiedź brzmi 18^7. Dlaczego? Wystarczy zauważyć, że

$9^2 = 81 = (8+1)^2$,

$8^3 = 512 = (5+1+2)^3$,

$7^4 = 2401 = (2+4+0+1)^4$,

$28^5 = 17210368 = (1+7+2+1+0+3+6+8)^5$,

$18^6 = 34012224 = (3+4+0+1+2+2+2+4)^6$,

$18^7 = 612220032 = (6+1+2+2+2+0+0+3+2)^7$.

A jaki jest następny wyraz tego ciągu?

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Jakie są trzy następne wyrazy ciągu (1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, ...)?
2. Jaka jest zasada konstrukcji ciągu 10-cyfrowych numerów telefonów (0146483421, 1211301010, 3511000000, 6201010000, ...)?
3. Jak jest kolejna liczba w kolumnie?

1
11
21
1211
111221
312211

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Wyraz a_n jest najmniejszą liczbą o tej własności, że jest to n-ta potęga sumy cyfr. Jak widać wiedzieć to jeszcze nie to samo, co rozumieć.

Zadania dla Czytelników

Kiedy odgadniemy już zasadę, według której konstruowane są kolejne wyrazy ciągu, ciekawym zadaniem jest badanie własności tak otrzymanego ciągu. Oto kilka przykładów.

1. Uzasadnij, że:

a) ilorazy kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego coraz lepiej przybliżają liczbę złotą $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618339887$;

b) w ciągu tym występują tylko dwa kwadraty: 1 i 144.

2. Profesor Hugo Steinhaus zachęcał swoich uczniów do badania własności ciągu

(2, 3, 6, 1, 8, 6, 8, 4, 8, 4, 8, 3, 2, ...).

Jaka może być zasada jego konstrukcji? Uzasadnij własności:

a) W ciągu nie natrafimy nigdy na dwie kolejne liczby nieparzyste.

b) W ciągu nie pojawią się nigdy 5, 7 ani 9.

3. Uzasadnij, że w ciągu z przykładu 5 może wystąpić tylko pięć (z możliwych 16) 4-cyfrowych układów zer i jedynek. Jakie to układy?

Na rozwiązania zadań czekamy do końca grudnia.

LITERATURA

[1] J.H. Conway, R.K. Guy, *Księga liczb*, WNT, Warszawa 1999.
[2] R. Fischer, *Liczby Fibonacciego na giełdzie*, WIG-Press, Warszawa 1996.
[3] M. Gardner, *The Multiple Fascination of the Fibonacci Sequence*, „Scientific American" N° 220, March 1969.
[4] M.E. Lines, *Liczby wokół nas*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995.
[5] M. Maciocha, *Zadany przepis na ciąg*, „Matematyka" nr 4/1999, s. 252.
[6] K. Omiljanowski, *Ile osób tyle wzorów*, „Matematyka" nr 2/1998, s. 96.
[7] A.N. Philippou, A.F. Horadam, G.E. Bergum, *Applications of Fibonacci numbers*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1986.
[8] R. Rabczuk, *Co dalej w ciągu liczb?* „Gradient" nr 1/2001.
[9] H. Steinhaus, *100 zadań*, PHU DIP, Warszawa 1993.
[10] M. Szurek, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa 1987.
[11] N.N. Worobiow, *Ciągi Fibonacciego*, PWN, Warszawa 1955.

Rościsław Rabczuk

Rozwiązania zadań z artykułu *Co dalej?*

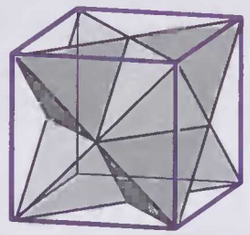
1. 5, 7, 9. Są to kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π.

2. Pierwszy wyraz ciągu wybieramy dowolnie. Aby otrzymać wyraz następny, liczymy, ile razy w zapisie numeru poprzedniego występują cyfry 0, 1, ..., 9 (w takiej kolejności), a potem otrzymane w ten sposób liczby wystąpień zapisujemy jako cyfry tworzące kolejny wyraz ciągu. Np. w pierwszym numerze mamy jedno zero, dwa jedynki, jedną trójkę itd., więc drugi numer rozpoczynają cyfry 121. Zauważmy, że od piątego wyrazu opisany ciąg jest stały.

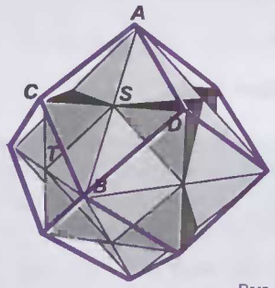
3. Zaczynamy od 1. Kolejna liczba to niejako zapis liczby poprzedniej. Pierwszy wyraz czytamy jako „jedna jedynka" (piszemy 11), drugi czytamy „dwie jedynki" (piszemy 21), następny to „jedna dwójka, jedna jedynka" (piszemy 1211) itd. Kolejny wyraz ciągu to 131122211.

Opakowania

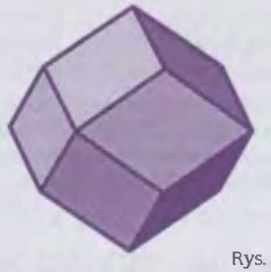
W poprzednich numerach zachęcaliśmy do wykonania modeli kompozycji wzajemnie się przenikających dualnych wielościanów platońskich. Modele te były oczywiście niewypukłe. W kolejnych dwóch numerach zastanowimy się, w jakie wypukłe wielościany można by nasze kompozycje „zapakować".



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Mówiąc precyzyjniej – interesuje nas najmniejsza z możliwych brył wypukłych, która zawiera daną bryłę. W matematyce określa się ją mianem **uwypuklenia bryły**.

W przypadku *stelli octanguli* (tekst z numeru 2/2003) sprawa jest łatwa. Wystarczy rzut oka na model i widać, że „opakowaniem" jest sześcian. Krawędzie czworościanów tworzących stellę są przekątnymi jego ścian (rys. 1).

Przyjrzyjmy się teraz kompozycji sześcianu z ośmiościanem (tekst z numeru 3/2003). Punkty będące końcami przecinających się krawędzi AB oraz CD (rys. 2) leżą w jednej płaszczyźnie i wyznaczają czworokąt. Krawędzie te są prostopadłe i połowią się wzajemnie, co oznacza, że czworokąt ten jest rombem. Romb można scharakteryzować (z dokładnością do podobieństwa) podając stosunek długości jego przekątnych (w naszym wypadku $AB:CD$). Jego obliczenie nie jest trudne.

$AB = 2AS = 2ST$ (dlaczego?),

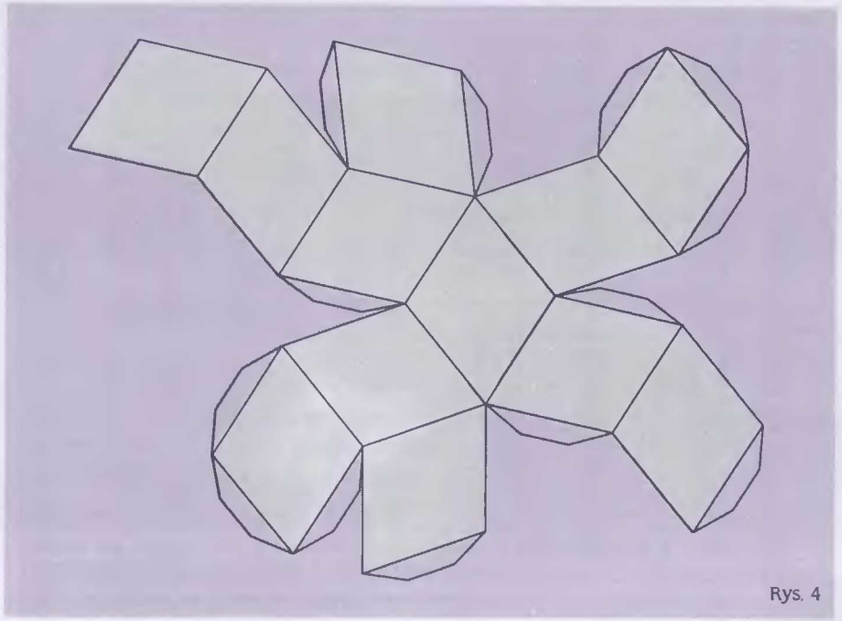
a $ST = \sqrt{2}\,CS$ (dlaczego?) i $CS = \frac{1}{2}CD$.

Mamy więc $AB:CD = \sqrt{2}$.

„Opakowaniem" tej kompozycji jest zatem wielościan, którego ściany są rombami o stosunku przekątnych $\sqrt{2}$. Liczba ścian tego opakowania jest równa liczbie krawędzi sześcianu (lub ośmiościanu). Jest ich 12. Dlatego to opakowanie nosi nazwę **dwunastościanu rombowego**. (rys. 3).

Wielościan ten ma 12 przystających ścian, ale jego naroża nie są przystające. Ma dwa rodzaje wierzchołków: takie, w których schodzą się 4 ściany (kątami ostrymi), i takie, w których schodzą się 3 (kątami rozwartymi). Bryłę tę po raz pierwszy opisał Johannes Kepler. Jej siatkę przedstawia rys. 4.

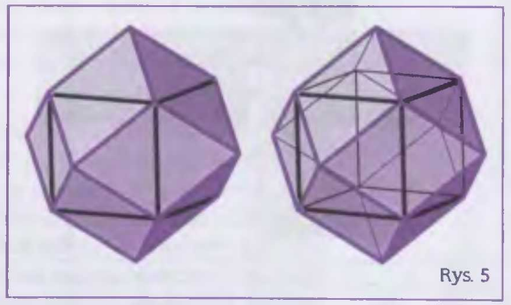
Dwunastościan rombowy ma wiele ciekawych własności. Można



Rys. 4

- Do praktycznego wykorzystania warto siatkę powiększyć.
- Ściany bez żadnych skrzydełek z rys. 4, 6 i 7 powinny być przyklejone na końcu.

nim wypełnić przestrzeń podobnie jak sześcianami. Można to sprawdzić wykonując kilka modeli tego wielościanu. Kolejna własność (wykorzystana w zadaniu konkursowym nr 15 z poprzedniego numeru) jest związana z poprzednią: krótsze przekątne ścian dwunastościanu rombowego są krawędziami sześcianu (rys. 5).



Rys. 5

Jeżeli odetniemy widoczne na rysunku piramidy (jest ich sześć), będzie można z nich złożyć drugi sześcian. Model ilustrujący tę własność wygląda bardzo atrakcyjnie. Zabawka składa się z dwóch części – sześcianu (siatka z rys. 6) oraz sześciu połączonych ze sobą ostrosłupów odciętych od dwunastościanu rombowego. Podstawy ich są kwadratami, a ściany boczne trójkątami równoramiennymi. Jeżeli kwadrat ma bok a, to wysokość ściany bocznej wynosi $a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Odpowiednią siatkę przedstawia rys. 7. Sklejone ostrosłupy łączymy w ten sposób, aby ich podstawy tworzyły siatkę sześcianu. Można to zrobić używając tasiemek, ewentualnie taśmy klejącej. Ostrosłupy nie powinny być połączone zbyt ciasno – odstęp pomiędzy piramidkami powinien wynosić 1–2 mm. Gotowy model widziany z góry

Zadania dla Czytelników

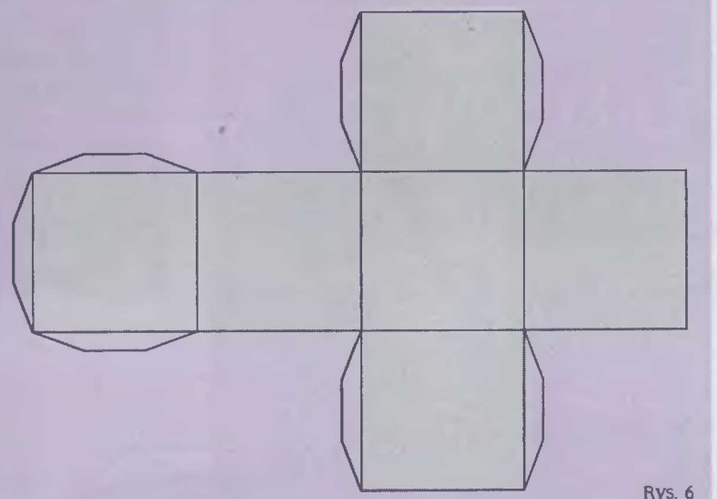
1. Ile wierzchołków i krawędzi ma dwunastościan rombowy?

2. Jak wygląda wielościan dualny do dwunastościanu rombowego? (O wielościanach dualnych pisaliśmy w numerze 3/2003).

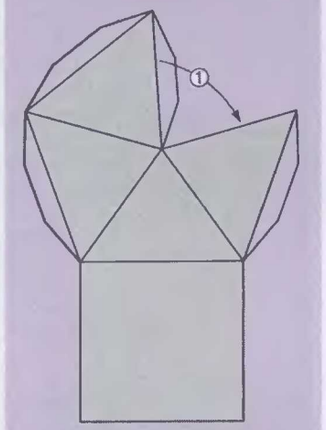
3. Jakie bryły foremne (poza sześcianami) wypełniają przestrzeń?

4. Czy są inne (poza 12-ścianem rombowym) bryły regularne wypełniające przestrzeń?

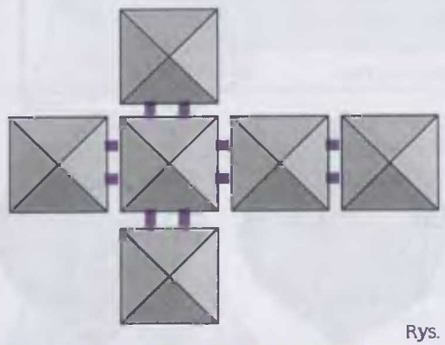
Na rozwiązania zadań czekamy do końca grudnia.



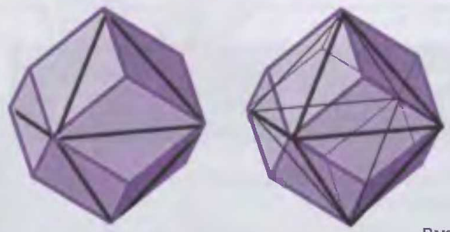
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



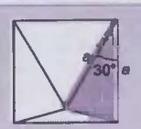
Rys. 9

przedstawia rys. 8. Składając go wierzchołkami do środka otrzymujemy sześcian, a owijając wokół wykonanego wcześniej modelu sześcianu – dwunastościan rombowy. Siatki z rys. 6 i 7 powinny być powiększane w tej samej skali; w przeciwnym razie na sześcian nie da się nawinąć łańcuszka piramidek.

Przyjrzyjmy się jeszcze dłuższym przekątnym ścian dwunastościanu rombowego (rys. 9). Można się domyślić, że są one krawędziami ośmiościanu foremnego. Podobnie jak sześcian, ośmiościan możemy otrzymać odcinając od dwunastościanu rombowego odpowiednie ostrosłupy (jest ich 8). Z poprzednich dało się zbudować sześcian. A co można zbudować tym razem?

Opakowanie na kompozycję dwunastościanu z dwudziestościanem opiszemy w następnym numerze.

Piotr Pawlikowski



Wskazówka do zadania 1 z artykułu *Wariacje na trójkącie*

Z notatnika starego belfra

Nauczyciel do tablicy

Miejsce przy tablicy powinno być zastrzeżone dla nauczyciela. Naturalnym miejscem ucznia w klasie jest ławka. Przyjęty u nas zwyczaj „odpytywania" przy tablicy nosi atrybuty średniowiecznego pręgierza, a dla reszty klasy (oprócz wątpliwej rozrywki) jest to czas stracony. Proceder ten jest wysoce nieetyczny oraz sprzeczny z prawem człowieka do poszanowania jego godności i intymności. Podobnie zresztą jak wszelkie formy publicznego ogłaszania ocen ze sprawdzianów lub omawiania wypracowań wobec całej klasy.

Sprawdzanie, korygowanie, ćwiczenie i utrwalanie wiadomości i umiejętności powinno się odbywać bez dodatkowych szykan (a więc najlepiej w ławce) i bez karnych konsekwencji, ale pod czujnym okiem nauczyciela. Dobry nauczyciel wędrując pośród ławek (jak mistrz szachowy rozgrywający symultanę na kilkunastu stolikach) potrafi śledzić całą klasę, a zarazem postępy każdego ucznia. Może wtedy reagować indywidualnie na jednostkowe problemy, może pozwolić na pomoc sąsiadów w wyjaśnianiu drobnych błędów lub omówić przy tablicy te, które dostrzegł u wielu osób. Dzięki temu już po kilku tygodniach może wiedzieć wszystko, co chce, o każdym uczniu.

Uczniowie (i nauczyciele!) powinni rozumieć, że nauczyciel robiąc sprawdzian ocenia w zasadzie wyniki własnej pracy, na własny użytek, po to, by diagnozować i korygować własne błędy dydaktyczne (dlaczego więc tę ocenę wstawia potem uczniowi?). Przy tak pojmowanym celu sprawdzianu (pisemnego lub ustnego) uczniowie nie czują potrzeby ściągania i mogą z pełnym zaufaniem i we własnym interesie odkryć przed nauczycielem swoje słabe strony. Jednak takie sprawdziany nie mogą być podstawą do wystawiania uczniom stopni wymaganych przez władze oświatowe. A jeśli władze żądają ocen, co wtedy robić? Dobry nauczyciel może sprawiedliwie sklasyfikować wszystkich z pamięci. A jeśli pamięć zawodzi, może robić sprawdziany, podczas których obowiązują wiadome prawa (oceny, ściąganie, kary za ściąganie itp.). To władzom do ich celów powinno wystarczyć. Taką mamy, niestety, paradoksalną szkołę.

Podczas każdej lekcji powinna obowiązywać stara zasada: **uczeń powinien być stale zajęty, a nauczyciel – przejęty**. Tylko nauczyciel przejęty swoją lekcją tak, jakby razem z uczniami po raz pierwszy odkrywał to, co właśnie mają poznać, potrafi skutecznie zająć uczniów. Inny nie powinien uczyć w ogóle. Więcej o nim, o dobrym nauczycielu, w następnych numerach.

Antoni Dindorf

Wyłowione z sieci

Open Directory Project

http://www.dmoz.org/World/Polska/Nauka_i_Edukacja/Matematyka/
http://www.dmoz.org/Science/Math/

Jest to największy i według wielu najlepszy katalog internetowy. Co ciekawe, jest całkowicie tworzony przez ludzi, a nie (jak większość katalogów dostępnych w portalach) przez maszyny. Pracuje nad nim ponad 50 tysięcy ochotników na całym świecie. Codziennie dodają oni setki nowych stron. W chwili pisania tego tekstu w katalogu jest ponad 3 miliony odnośników, głównie do stron anglojęzycznych. Zaczynają jednak powstawać również regionalne wersje katalogu. W polskim dziale poświęconym matematyce można znaleźć 50 stron, a w wersji angielskiej jest ponad 10 tysięcy odnośników podzielonych na kategorie tematyczne.

π do 1 000 000

http://3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 2.com/

Mówi się, że w Internecie można znaleźć wszystko. I to chyba prawda. Na tej stronie (o niełatwym do zapamiętania adresie) znaleźć można liczbę π zapisaną z dokładnością do miliona miejsc po przecinku.

The secret lives of numbers

http://turbulence.org/Works/nums/

Autorzy strony wykorzystali dostępne wyszukiwarki, aby stwierdzić, które liczby naturalne od 0 do 100 000 występują najczęściej w naszym życiu. Tworzony na bieżąco wykres częstości występowania każdej z nich pozwala prześledzić jej popularność oraz dowiedzieć się, w jakich związkach wyrazowych występuje ona najczęściej.

Matma

http://matma.prx.pl/

Jest to niewielki serwis matematyczny, w którym można znaleźć wiadomości z algebry i geometrii na poziomie szkoły średniej, biografie znanych matematyków oraz różne ciekawostki (np. historię szachów, historię zapisu liczb, bardziej i mniej znane cechy podzielności). Interesujący jest dział poświęcony niezwykłym liczbom. Znajdujemy tam np. liczby automorficzne – których kwadrat kończy się tą właśnie liczbą.

wyłowił Wojciech Głodek

Forum Czytelników

http://www.atut.iq.pl/mmm

Prezentujemy odpowiedź Komitetu Organizacyjnego Mistrzostw Polski w GMiL na listy zamieszczone w poprzednim numerze MMM.

Pomimo usilnych starań od 1993 roku nie udało się nam znaleźć strategicznego sponsora Konkursu, a pisma kierowane w tej sprawie do resortu edukacji pozostają bez odpowiedzi. Dysponując skromnymi środkami (głównie z opłaty wpisowej), nie możemy finansować wyjazdu do Paryża całej 20 osobowej ekipy. Główną nagrodą dla zdobywców pierwszych miejsc w 8 kategoriach jest wyjazd na tygodniową wycieczkę do Paryża (nie tylko na zawody). Zdobywcy dalszych miejsc otrzymują nagrody rzeczowe (bardziej wartościowe niż nagrody zwycięzców), a w razie dołączenia ich do reprezentacji Polski ich wyjazd jest częściowo finansowany ze środków konkursu. Jeśli prezydent RP, prezes RM, marszałek Sejmu RP, minister ENiS i inne prominentne osobistości fundują tylko puchary dla zwycięzców, to my kierujemy do nich podziękowania, a nie – wzorem autora listu z pretensjami – mamy im to za złe...
Jeśli chodzi o włączenia do reprezentacji Polski na finał XVII MM w GMiL Nadbora Drozda, ucznia I klasy XIV LO we Wrocławiu, to jury postanowiło wyróżnić specjalnie tego biorącego po raz pierwszy udział w konkursie licealistę, ponieważ rozwiązał on łącznie, w półfinale i w finale, 19 na 20 zadań, podczas gdy zwycięzca tej kategorii tylko 17. Fakt sponsorowania wyjazdu do Paryża przez marszałka województwa dolnośląskiego nie miał wpływu na decyzję jury. W kolejnych edycjach konkursu, będzie obowiązywał nowy regulamin, zgodnie z którym uczestnicy finałów krajowych będą klasyfikowani (na wzór finałów w Paryżu) na podstawie łącznego wyniku dwudniowych zawodów we Wrocławiu. Z przeprowadzania półfinałów w różnych miastach Polski musieliśmy zrezygnować, gdyż nie byliśmy w stanie zapewnić ich regulaminowego przebiegu, na co skarżyło się wielu uczestników. Mimo tej niedogodności zapraszamy Czytelników MMM do udziału w kolejnej edycji konkursu. (Komitet Organizacyjny)

Krytyka Mistrzostw na *Forum Czytelników* w poprzednim numerze MMM była tendencyjna i oparta na nieznajomości reguł gry. Najlepiej byłoby zrezygnować z organizacji tej imprezy, aby zamknąć usta malkontentom. Im właśnie dedykuję fraszkę zamieszczoną w *Przekroju* z lat 50-tych XX w. (RR)

Krytyk i eunuch
z jednej są parafii.
Każdy się wysila,
żaden nie potrafi.

W środku wakacji wszystkie telewizyjne programy informacyjne nadały obszerny materiał o drużynie polskich strażaków, którzy zdobyli złoty medal w konkurencji siłowania się na rękę na międzynarodowych zawodach strażaków i policjantów. W tym samym czasie nasi uczniowie wracali ze złotym medalem z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i nie można było o tym nigdzie ani usłyszeć, ani przeczytać. A przecież mamy z czego być dumni. A może by tak zamiast rozwiązywać zadania zacząć tam siłować się na rękę? (Oglądacz)

Łamanie głowy, czyli burza w mózgu

Zadania konkursowe

Dla osób, które rozwiążą najwięcej zadań w 2003 roku, przewidujemy specjalną nagrodę – niespodziankę!

Za pomysły zadań wykorzystanych w tym numerze dziękujemy: Jerzemu Janowiczowi, Piotrowi Pawlikowskiemu, Rościsławowi Rabczukowi, Eugeniuszowi Sikorskiemu i Lechowi Stawikowskiemu.

Uczestnikom konkursu zadaniowego przypominamy o konieczności naklejenia kuponu (oryginalnego!) na kopertę z rozwiązaniami. Tylko takie prace mogą wziąć udział w losowaniu nagród. Jednocześnie prosimy o czytelne podawanie nazwiska i adresu. O przyjęciu pracy decyduje data stempla pocztowego.

Jeśli chodzi o nadsyłane rozwiązania, to nie ma sztywnej reguły, kiedy wystarczy odpowiedź, a kiedy potrzebne jest pełne rozwiązanie. Musimy pozostawić to ocenie Czytelników. Bezpieczniej jest przysyłać zadania z rozwiązaniami, choć w niektórych przypadkach uzyskanie prawidłowej odpowiedzi jest równoznaczne z przeprowadzeniem rozumowania, które może być żmudne i trudne do zapisania. Jednak np. w zadaniu 15 o pokrywaniu szachownicy powinno być jasne, że odpowiedź „tak" lub „nie" jest niewystarczająca. Należy podać przykładowe pokrycie lub uzasadnienie, że nie da się ono zrealizować. Jeśli zadanie ma więcej rozwiązań, należy podać wszystkie. Nie ma potrzeby dowodzenia standardowych faktów matematycznych.

1. Podział kąta

W trójkącie ABC, w którym $\sphericalangle ABC = 60°$, kąt BAC podzielono na 3 równe części. Jedna z dzielących go półprostych zawiera wysokość trójkąta. Oblicz $\sphericalangle BAC$.

2. Zielone rajtuzy

Pewnego dnia w klasie wybuchła kłótnia. Kaśka, Laura, Małgosia i Natalia sprzeczały się o to, które z nich tydzień temu były ubrane w zielone rajtuzy. Każda z dziewczynek codziennie zmieniała rajtuzy i nigdy nie zdarzyło się, żeby któraś przez dwa kolejne dni nosiła rajtuzy tego samego koloru. Ku zaskoczeniu wszystkich z pomocą przyszli im chłopcy, którzy od jakiegoś czasu bacznie przyglądali się dziewczynom. Co prawda żaden nie pamiętał, która z dziewczyn tydzień temu miała zielone rajtuzy, ale coś tam jednak zapamiętali.

Krzysiek: Przyglądałem się Kaśce i Laurze. Zauważyłem, że w ciągu ostatnich dwóch tygodni nie było dnia, żeby jedna z nich miała zielone rajtuzy, a druga nie.

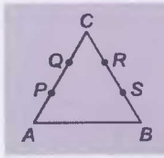
Lucjusz: Ja natomiast zwróciłem uwagę na fakt, że w tym czasie nie było dnia, żeby Małgosia i Natalia były jednocześnie ubrane w zielone rajtuzy.

Michał: Tydzień temu Kaśka i Natalia odpowiadały z geografii. Doskonale pamiętam, że jedna z nich miała wtedy zielone rajtuzy, ale nie pamiętam, która. Na pewno nie obie.

Norbert: A ja zauważyłem, że ilekroć Laura przychodziła w zielonych rajtuzach, to Natalia też.

Czy te informacje wystarczą do rozstrzygnięcia sporu?

3. Podział boków



W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 3 podzielono boki CA i CB na trzy równe części punktami P, Q, R, S. W jakiej odległości od punktu A prosta QS przetnie prostą AB?

4. Wielokąty w okręgu

Na okręgu zaznaczono wierzchołki dwunastokąta foremnego, a następnie wybrano 9 spośród nich i łącząc kolejno wyznaczono pewien wielokąt. Ile nieprzystających wielokątów można w ten sposób uzyskać?

5. Demonstracja

W tłumie demonstrantów każdy ma dokładnie 5 przyjaciół. Czy protestujący mogą przemaszerować w kolumnie dwójkowej?

6. Zjazd matematyków

Po zakończeniu obrad zjazdu w Kanie Galicyjskiej naukowcy zebrali się na obiedzie. Dla rozrywki zadawali sobie zagadki. Profesor Edo Potęgi dostał do wyboru dwa pudełka, w których mogła znajdować się szklanka wody lub lampka wina. Na pudełkach znajdowały się pewne napisy, które mogły być prawdziwe lub nie. Wiadomo, że jeśli w pudełku 1. jest wino, to napis na nim jest prawdziwy, a jeśli jest w nim woda, to napis jest fałszywy. W przypadku pudełka 2. obowiązuje zasada przeciwna. Niestety silny przeciąg zerwał z pudełek kartki z napisami i nie wiadomo, który był na którym. Napisy były następujące: „W tym pudełku jest woda" oraz „W obu pudełkach jest woda". Profesor nie przepadał za piciem wody. Które pudełko powinien wybrać?

7. Siatki sześcianu

Ile jest różnych (tzn. nieprzystających) siatek danego sześcianu?

8. Szczęśliwe liczby

Wyobraźmy sobie wszystkie liczby naturalne napisane w rzędzie. Rozpoczynamy od 1 i to będzie pierwsza liczba szczęśliwa. Kolejną napotkaną liczbą w ciągu jest 2, zatem usuwamy z ciągu co drugą liczbę zaczynając od drugiej. Teraz pierwszą wolną (nierozważaną i nieskreśloną) liczbą jest 3, usuwamy więc w pozostałym ciągu co trzecią liczbę zaczynając od trzeciej. Pierwszą wolną liczbą jest teraz 7, więc skreślamy co siódmą liczbę poczynając od siódmej. W ten sposób postępujemy dalej. Nieskreślone liczby utworzą zbiór liczb szczęśliwych. Jaka jest trzynasta liczba szczęśliwa? Ile jest liczb szczęśliwych w pierwszej setce liczb naturalnych?

9. Przydział na działkę

Związek działkowców „Nie przesadzaj" przydzielił panu Onufremu 150 m^2 gruntu, z zastrzeżeniem aby nadał on swojej działce kształt prostokąta. Pan Onufry postanowił ogrodzić działkę siatką. Jakie wymiary powinna mieć działka, aby zużył na toogrodzenie jak najmniej siatki?

10. Jesienna orka

Koń orał pole przez cały dzień. Od miedzy do miedzy pole rozciągało się na 95 m. Przy każdym kroku koń wystawiał nogę na 0,5 m naprzód. Ile śladów kopyt zostawił w ostatniej bruździe?

11. Na kortach

Kierownik klubu plażowego w Piaskowych Babkach chce zbudować i ogrodzić siatką korty tenisowe. Korty powinny mieścić się w prostokącie o polu 3920 m^2. Na terenie przygotowanym pod korty stoi już odpowiednio wysoka siatka o długości 80 m, którą można wykorzystać jako element ogrodzenia lub materiał na nie. Koszt postawienia 1 m nowej siatki wynosi 120 zł, pomalowanie starej siatki pozostawionej na swoim miejscu to 20% tej ceny, a przestawienie metrowego fragmentu starej siatki na nowe miejsce to 60%. Jaki będzie najniższy koszt ogrodzenia kortów?

12. Matematyczne podróże

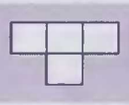
W Gryflandii znajdują się 2003 miasta. Między każdymi dwoma istnieje dokładnie jedno z sześciu możliwych połączeń: samolotem, autobusem, rowerem wodnym, statkiem, balonem bądź pociągiem. Czy istnieją takie trzy miasta, między którymi można poruszać się nie zmieniając środka transportu?

13. Pieski żywot

Dwa psy urodziły się w tym samym czasie, wiele podróżowały po świecie, a potem w tym samym czasie zakończyły życie, lecz nie żyły tak samo długo. Jak to możliwe?

14. Sosy do sałatek

Mamy do dyspozycji sosy: pikantny, kwaśny, słodki, gorzki i słony. Na ile sposobów możemy przyprawić nimi sałatkę?



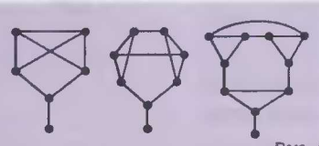
15. Parkietowanie szachownicy

Czy szachownicę o wymiarach 14 × 14 można pokryć kartonikami o kształcie jak na rysunku (kwadraty kartonika pokrywają się z polami planszy)?

Wyniki i podpowiedzi

Rozwiązania zadań konkursowych z numeru 2/2003

W zadaniach, które nie sprawiły Wam kłopotu, ograniczamy się do podania odpowiedzi, w pozostałych podajemy też szkice rozwiązań.



Rys. 1

1. Kozy na pastwiskach. 60 kóz. **2. Zakochani.** Genowefę kocha Cezary, a Barnabę – Eulalia. **3. Zakupy do biblioteki.** 10 szt. *Robinsona Crusoe* i 8 szt. *W pustyni i w puszczy*. **4. Konspiratorzy.** Było 6, 8 lub 10 osób. Możliwe diagramy przedstawia rysunek 1. Liczba konspiratorów nie może być nieparzysta, bo otrzymalibyśmy graf o rzędzie nieparzystym (patrz *O podawaniu rąk* s. 15). **5. Misja 2002 agenta 002.** Mimo błędu w druku większość rozwiązań była poprawna: 22222020020 (zapis w systemie dwójkowym, w którym jedynki zastąpiono dwójkami). **6. Na linowym moście.** Wystarczy 17 sekund. Niech numer turysty oznacza czas jego przejścia przez most. Idą 1 i 2, wraca 1, idą 5 i 10, wraca 2, idą 1 i 2. **7. Jak pies z kotem.** Wystarczą 32 ruchy. **8. Tajemnicze słowo.** To zagadka lateralna. Wykreślamy O, S, I, E, M, L, I, T, E, R. **9. Fałszywe monety.** Wystarczą i są potrzebne 3 ważenia. **10. Okrągły stół.** Możliwe usadzenie pokazuje rys. 2. **11. Prostokąty.** Dowolny prostokąt wyznaczają dwie proste równoległe do dłuższego boku (jest ich 2003) i dwie równoległe do krótszego (jest ich 2004). Pierwsze dwie proste można wybrać na $\frac{2003\cdot 2002}{2}$ sposobów, a drugie dwie na $\frac{2004\cdot 2003}{2}$ sposoby. Na rysunku jest zatem $\frac{2002\cdot 2003^2\cdot 2004}{4}$ prostokątów. **12. Pocięty wielokąt.** Wielokąt nie może być wypukły. W sytuacji z rys. 3 po rozcięciu prostą można otrzymać 1002 części. **13. Podział kąta.** Prowadzimy z wierzchołka kąta przekątne do pozostałych wierzchołków. Powstałe kąty są równe, bo są kątami wpisanymi w okrąg (opisany na 2003-kącie) opartymi na przystających łukach. **14. Liczebniki.** Spis rozpoczyna 40, kończy 13. **15. Szprychy w kole.** Przykładamy linijkę i sprawdzamy, czy szprychy przedłużają się do średnicy. Wtedy ich liczba jest parzysta.

Rys. 2

Rys. 3

Wyniki konkursu z numeru 2/2003

Tym razem wszystkie zadania zostały rozwiązane, chociaż nikt nie zrobił ich wszystkich. Tylko jedna osoba miała zaliczoną taka liczbę zadań, jaką zadeklarowała. Nagrody pieniężne otrzymują (w nawiasie podajemy liczbę zaliczonych zadań):

200 zł – **Jakub PURSKI**, Rawa Mazowiecka (14),

100 zł – **Jan KACZMARCZYK**, Kraków (14), **Magdalena KOLASIŃSKA**, Rębiska (12), **Sabina JANECKA-MASTALERZ**, Warszawa (12), **Piotr BOGDANOWICZ**, Radzyń Podlaski (11), **Antoni SZENDERA**, Katowice (11),

50 zł – **Ewa PŁUŻEK**, Brzeszczyce (11), **Zbigniew MATCZAK**, Płock (10), **Jakub NAWROCKI**, Katowice (10), **Anna PIWNIK**, Warszawa (10), **Elżbieta TAMBOR**, Sosnowiec (10), **Anna WRONA**, Wrocław (10), **Agnieszka KOŚCIELNIAK**, Konopiska (9), **Patryk DROBIŃSKI**, Bydgoszcz (8), **Kamila GĄSZCZ**, Stalowa Wola (7), **Janusz SZCZYPTA**, Nowy Sącz (7).

Nagrody książkowe za rozwiązania zadań dla czytelników z numeru 2/2003 z artykułów: *Stella octangula*, *Matematyka bez granic* i *Gry w skreślanki* otrzymują: **Jakub MATUSZEWSKI** Poznań, **Sławomir SZCZEPANIAK** Lubin, **Michał SZKODZIŃSKI** Toruń.

Rozwiązania z numeru 3/2003

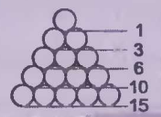
Konkurs *Nudna matematyka*

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

Klasa I: **1.** $120 = 3\cdot 5\cdot 8$, więc szukanymi liczbami są 3, 5, 7, 8. **2.** Wielokąt jest 11-kątem. Po usunięciu wierzchołka powstaje dziesięciokąt, który ma 35 przekątnych i jedną oś symetrii (jest to ta oś symetrii 11-kąta, która przechodziła przez usunięty wierzchołek). **3.** 330 trójkątów (296 pochodzi z 74 prostokątów o wierzchołkach w punktach kratowych).

Klasa II: **1.** Są trzy możliwe liczby: 71, 82, 93. **2.** $\frac{5}{22} = 0{,}2(27)$, $\frac{5}{37} = 0{,}(135)$, $\frac{5}{7} = 0{,}(714285)$. Setnymi cyframi tych ułamków są odpowiednio: 2, 1, 2. **3.** Jeśli przez t_n oznaczymy n-tą liczbę trójkątną, to: a) 6 (czyli $t_1\cdot t_3$), b) 10 (czyli $t_1\cdot t_4$), c) 9 (czyli $t_2\cdot t_2$), d) 18 (czyli $t_2\cdot t_3$).

Liczba trójkątna to liczba przystających kół, które można ustawić w „trójkąt równoboczny".



a) b) c) Rys. 4

Klasa III: **1.** 28 cm/s i 12 cm/s. **2.** a) nie, suma taka jest zawsze parzysta, lecz niepodzielna przez 4; b) tak, np. $6^2+8^2=10^2$; c) tak, np. $3^2+4^2=5^2$. **3.** rys. 4.

Pytania z artykułu *Osiołek na pastwisku*

Czworościan równopolowy (ma ściany o równych polach) jest zawsze równościenny (ma ściany przystające). Inne wielościany mogą być równopolowe, ale nie równościenne, np. równoległościan o podstawie kwadratowej i wysokości równej bokowi tego kwadratu („kopnięty sześcian").

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

Zadania z artykułu *Pierwsze? Absolutnie!*

1. Nie ma sześciocyfrowych liczb absolutnie pierwszych. Wystarczy zbadać liczbę 111111 i znaleźć 12 odpowiednich przykładów liczb postaci $A_{6(a,\,b)}$, gdzie a, b należą do zbioru {1, 3, 7, 9} i cyfra a występuje w zapisie liczby 5 razy, a b tylko raz.
$A_6 = 111111$ jest złożona, bo dzieli się przez 11. Dalej mamy: $A_{6(1,\,3)} \to 111113 = 23 \cdot 4831$, $A_{6(1,\,7)} \to 111117$ dzieli się przez 3, $A_{6(1,\,9)} \to 111911 = 17 \cdot 29 \cdot 227$ (chociaż 111119 i 111191 są pierwsze), $A_{6(3,\,1)} \to 333313 = 149 \cdot 2237$, $A_{6(3,\,7)} \to 333373 = 389 \cdot 857$, $A_{6(3,\,9)} \to 333339$ i $A_{6(7,\,1)} \to 777771$ dzielą się przez 3, $A_{6(7,\,3)} \to 777773 = 709 \cdot 1097$, $A_{6(7,\,9)} \to 777779 = 113 \cdot 6883$, $A_{6(9,\,1)} \to 999991 = 17 \cdot 59 \cdot 997$, $A_{6(9,\,3)} \to 999993$ dzieli się przez 3, $A_{6(9,\,7)} \to 999997 = 757 \cdot 1321$. Dla tych, którzy chcieliby znaleźć liczby absolutnie pierwsze postaci $A_{n(a,\,b)}$, istotna informacja: udowodniono, że jeśli są to liczby większe niż trzycyfrowe, to liczba ich cyfr jest wielokrotnością 11088.

2. Przykłady liczb absolutnie pierwszych w zapisie trójkowym: 12, 111.

Lista nagrodzonych w następnym numerze.

Zadania z artykułu *Krewni stelli*

1. Dla 12-ścianu foremnego $S = 12$, $W = 20$, $K = 30$, dla 20-ścianu foremnego $S = 20$, $W = 12$, $K = 30$. **2.** Czworościan foremny. **3.** Liczba ścian wielościanu dualnego jest równa liczbie wierzchołków wyjściowego (i na odwrót), natomiast liczby krawędzi w obu wielościanach są równe. **4.** Część wspólna sześcianu z ośmiościanem jest wielościanem, który ma 14 ścian (6 kwadratowych i 8 trójkątnych). Wszystkie jego naroża są przystające i spotykają się w nich na przemian dwa trójkąty i dwa kwadraty. Część wspólna dwunasto- i dwudziestościanu ma 32 ściany (12 pięciokątów i 20 trójkątów). Wszystkie naroża są przystające i schodzą się w nich na przemian dwa trójkąty i dwa pięciokąty.

Pytanie z tekstu: Obie opisane kompozycje to krewni stelli octanguli, bo i ona jest kompozycją pary wzajemnie dualnych wielościanów platońskich. Jakich?

Kupon konkursowy „MMM" 4/2003

Liczba rozwiązań .....

Wśród Czytelników, którzy do końca grudnia 2003 nadeślą prawidłowe rozwiązania zadań konkursowych rozlosujemy nagrody.

Główna nagroda (za rozwiązanie przynajmniej 12 zadań) – **200 zł**,

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) – po **100 zł**,

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) – po **50 zł**.

Rozwiązania w kopertach z naklejonym kuponem konkursowym należy przesyłać na adres redakcji. Na kuponie prosimy wpisać liczbę rozwiązanych zadań.

Nauczyciel ma zawsze rację?

Jaś: *Przyniosłem dziś do szkoły dwie kanapki!*
Nauczyciel: *Jasiu, wyrażaj się poprawnie! Mówi się dwuelementowy zbiór kanapek.*

N: Jajko na twardo gotuje się w przeciągu 7 minut.
J: To proszę nastawić jajko, a ja otworzę okno i zrobię przeciąg.

N: To jest cyfra 3. Jasiu, napisz cyfrę trzy razy większą?
J: 3.

N: Jasiu, policz te pierwiastki: $\sqrt{225}$, $\sqrt{1600}$, $\sqrt{100}$
J: Jeden, dwa, trzy!

J: Większą połowę Ziemi zajmują oceany, a mniejszą połowę lądy.
N: Już tyle razy tłumaczyłem wam, że połowy są równe, ale i tak większa połowa z was tego nie zrozumie.

N: Co to jest?
J: To jest kot.
N: Nie, to rysunek kota. A to?
J: Mysz.
N: Nie, to rysunek myszy. A to?
J: Wiem, wiem. To rysunek kota łapie rysunek myszy.

N: Jasiu, napisz wielomian, który ma dwa pierwiastki.
J: $\sqrt{14}x+\sqrt{17}$.

N: Całek się nie rozwiązuje, tylko liczy. No to rozwiążmy najpierw taką całkę $\int_0^1 x^2dx$.
J: Raz.

Kto potrafi czytać i pisać, ma cztery oczy

(albańskie)