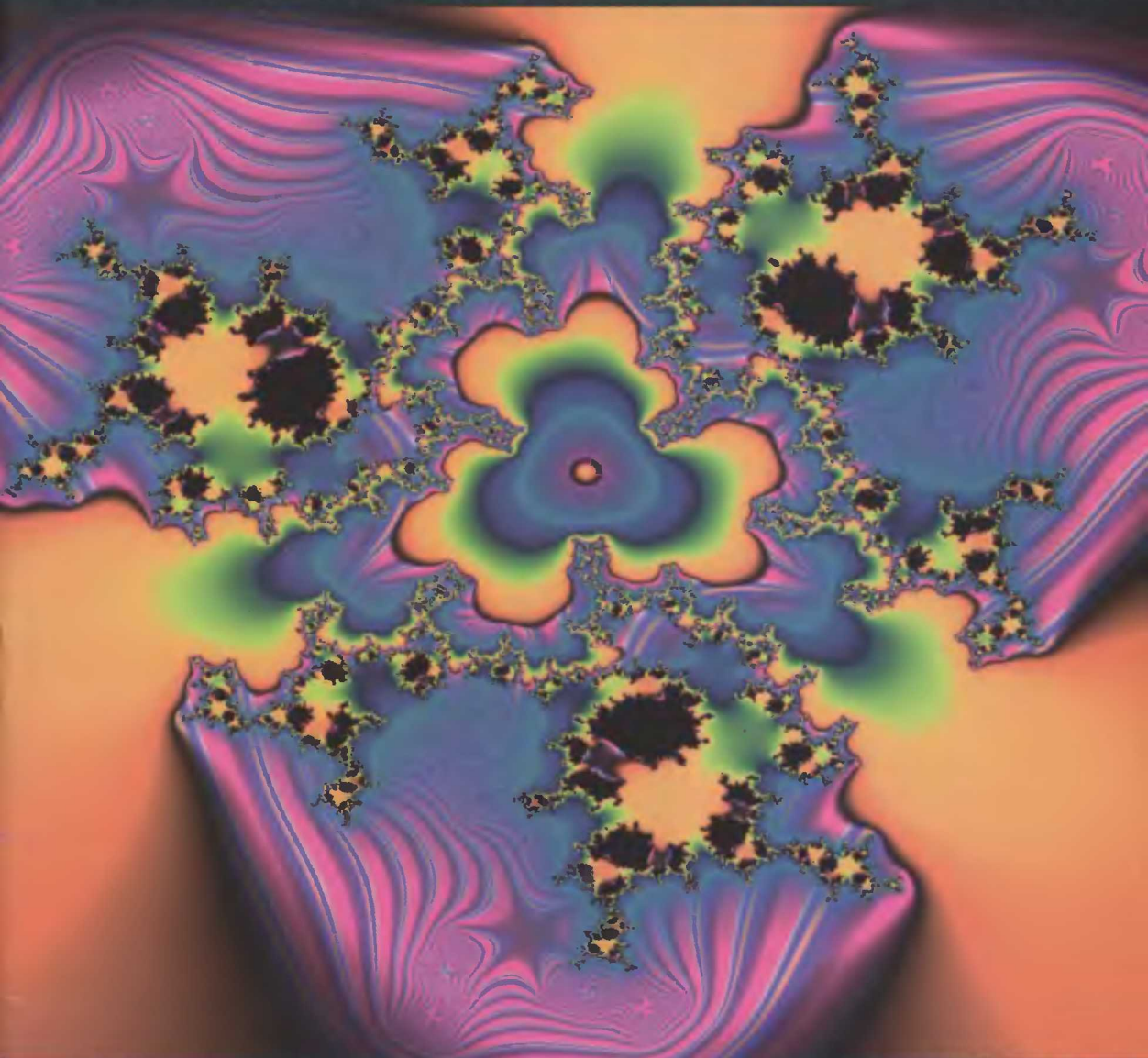
mmm

magazyn miłośników matematyki

kwartalnik nr 1(2) styczeń 2003 cena 5 zł (0% VAT) ISSN 1643-9481 indeks 372366



W numerze: Matematyczne zmagania, Z życia liczb, Matematyka od podstaw, Łamanie głowy, czyli burza w mózgu...

„Każdy człowiek ma określony horyzont. Gdy ten się zwęża i staje się nieskończenie mały, ogranicza się do punktu. Wówczas człowiek powiada: to jest mój punkt widzenia".

David Hilbert

„Komputer to taki niesłychanie sprawny idiota".

Hugo Steinhaus

„U podstaw wszelkiego rozumowania mamy zgadywanie nie poddane żadnym regułom, albo dedukcję poddaną rygorowi reguł".

Andrzej Grzegorczyk

„Wystarczy przyjąć, że pi równa się 2 przecinek 89 i z każdego koła można zrobić błędne koło".

Eugene Ionesco

w numerze:

Drodzy Czytelnicy

Już po raz drugi spotykamy się na łamach Magazynu Miłośników Matematyki. Listy, jakie do tej pory otrzymaliśmy od Was, utwierdzają nas w przekonaniu, że jesteśmy na dobrej drodze.
Chcielibyśmy, aby MMM był Wam coraz bliższy i coraz lepiej spełniał Wasze oczekiwania. Piszcie o wszystkim, co się Wam podoba, nie zapominając wszakże o krytyce.
Czekamy również na propozycje tematów, jakie warto byłoby poruszyć w kolejnych numerach.
Bardzo mile widziane będą też Wasze artykuły. Łamy MMM są otwarte!
W tym numerze kontynuujemy rozważania na temat gier w matematyce elementarnej, tym razem w kontekście teorii grafów.
Zdradzamy też tajemnice liczby 512, która tylko na pierwszy rzut oka jest zwyczajną liczbą.
Dla osób zainteresowanych udziałem w eliminacjach do Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych mamy garść informacji i zadań, a także relację z tegorocznego finału w Paryżu.
W części samouczkowej kolejne zadania opatrzone rozwiązaniami i szczegółowym komentarzem.
Na koniec, jak zwykle, porcja zadań i łamigłówek, które przynieść mogą sporo uciechy... ale też i nagrody.

Zapraszamy do lektury.
Redakcja

Matematyczne zmagania 2
Paryż zaprasza mistrzów 2
Gry w matematyce rekreacyjnej (2) 4
Z życia liczb 15
O pewnych własnościach i sekretach liczby 512 15
Matematyka od podstaw 17
Zadanie 1 – Nieszczęście księgowej 17
Zadanie 2 – Piłeczki białe i szare 22
Zadanie 3 – Kryptogram 28
Zadanie 4 – Algebraf 29
Zadanie 5 – Santa Cristina 32
Łamanie głowy, czyli burza w mózgu 35
Odpowiedzi do zadań 38

MMM magazyn miłośników matematyki

RADA REDAKCYJNA:
Rościsław Rabczuk
Zbigniew Romanowicz
Eugeniusz Sikorski
Sławomir Suchanowski

ZESPÓŁ REDAKCYJNY:
Eugeniusz Sikorski – redaktor naczelny
Zbigniew Gosławski – sekretarz redakcji
Adam Łowczycki – projekt okładki
Andrzej Duliba – grafika komputerowa, DTP
Krzysztof Skwark – menedżer tytułu

ADRES REDAKCJI:
Podwale 62, 50-010 Wrocław
tel. (0-71) 342-20-56,
e-mail: mmm@atut.ig.pl

Za treść reklam i ogłoszeń redakcja nie odpowiada. Niezamówionych materiałów redakcja nie zwraca.

Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadesłanych tekstów.

ISSN 1643-9481

Nakład: 5000 egz.

WYDAWCA:
Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe

Prenumeraty dla odbiorców indywidualnych i instytucji przyjmuje redakcja. Koszt prenumeraty równa się liczbie zamawianych numerów pisma mnożonej przez cenę pojedynczego numeru – 5 zł.
Należność prosimy wpłacać na konto:
Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe
BZ WBK SA I O/Wrocław
24109023980000000608025123

Każda wpłata na konto redakcji – dotycząca archiwalnych numerów i prenumeraty – powinna mieć adnotację, których numerów dotyczy oraz powinna zawierać adres kontaktowy do zamawiającego.

CENNIK REKLAM:
okładka (pełny kolor):
2 strona – 3000 zł
3 strona – 2000 zł
wnętrze (dwa kolory):
1 strona – 1000 zł
1/2 strony – 600 zł
1/3 strony – 400 zł
Podane kwoty są cenami netto, należy doliczyć 22% VAT.

RABATY:
Przy zamówieniu reklamy:
2-krotnej – 10%
3-krotnej – 15 %

Matematyczne zmagania

Paryż zaprasza mistrzów

W końcu sierpnia 2003 roku odbędzie się w Paryżu finał XVII Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych. Eliminacje, organizowane przez Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej i Oddział Wrocławski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, wyłonią kilkunastoosobową reprezentację Polski na paryski finał. Zapraszamy miłośników matematyki oraz tych, którym logiczne myślenie sprawia przyjemność i satysfakcję, do interesującego konkursu i wspólnej intelektualnej przygody.

Wspomnieć trzeba, że począwszy od tej edycji konkurs zyskał nową nazwę – Mistrzostwa Polski w Grach Matematycznych i Logicznych. Zmienił się też, w stosunku do poprzednich edycji, regulamin i system eliminacji do paryskiego finału. Więcej informacji dotyczących mistrzostw oraz zestaw zadań i wzór karty odpowiedzi można znaleźć na stronie internetowej Komitetu Organizacyjnego Mistrzostw:

http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.

Na przełomie sierpnia i września 2002 r. w Maison du Bridge – siedzibie Francuskiej Federacji Brydża w Paryżu – odbyły się finały międzynarodowe XVI Międzynarodowych Mistrzostw w GMiL. Uczestniczyło w nich 341 zawodników z 12 państw: Belgii, Czadu, Francji, Kanady, Luksemburga, Nigru, Polski, Słowacji, Szwajcarii, Tunezji, Ukrainy i Włoch. Zawodnicy startowali w ośmiu kategoriach wiekowych i zawodowych.

I tym razem Polacy nie wrócili do kraju bez medali. Oto lista naszych laureatów – złotych, srebrnych i brązowych medalistów:

Aleksander Pacion, SP nr 55 Szczecin – pierwsze miejsce w kategorii CE (uczniowie klasy III szkoły podstawowej),

Jakub Seweryn, SP nr 21 Białystok – drugie miejsce w kategorii CM (uczniowie klasy IV szkoły podstawowej),

Andrzej Dorobisz, SP nr 56 Kraków – trzecie miejsce w kategorii CM,

Robert Piszczatowski, LO nr 1 Białystok – drugie miejsce w kategorii L1 (uczniowie szkół średnich).

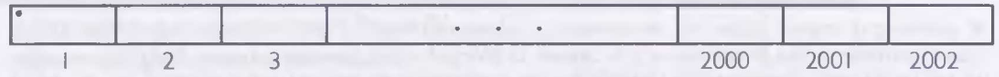
Obok prezentujemy kilka ciekawszych zadań z paryskiego finału (odpowiedzi w następnym numerze).

1. PIONKI NA PLANSZY

Maciek ustawił pionki na niektórych polach planszy 4×4 i dla każdego pola wyznaczył liczbę wszystkich pionków znajdujących się zarówno na polach linii poziomej, jak i na polach linii pionowej zawierającej wybrane pole. Zauważył, że dla każdego pola jego planszy znaleziona liczba pionków jest zawsze równa co najmniej 4. Jaka mogła być największa liczba wolnych pól na planszy Maćka?

2. BITWA MORSKA

Agnieszka i Bartek grają w bitwę morską na taśmie składającej się z 2002 pól.



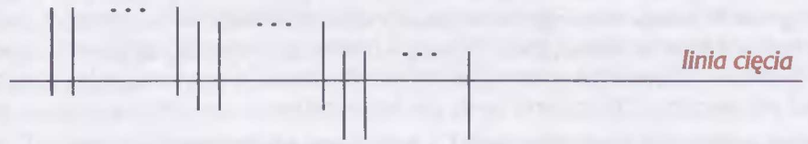
Agnieszka zaznacza na taśmie pozycję okrętu złożonego z czterech kolejnych pól i maluje jego dwa środkowe pola na kolor czerwony, a dwa skrajne pola na kolor niebieski. Bartek próbuje odgadnąć pozycję okrętu za pomocą kolejnych strzałów wskazując numery pól. Po każdym strzale otrzymuje od Agnieszki informację, jaki był efekt tego strzału. Agnieszka odpowiada mu stosując zawsze jeden z czterech umownych skrótów: „za bardzo na lewo", „za bardzo na prawo", „pole czerwone" lub „pole niebieskie". Jaka jest najmniejsza liczba strzałów, po których Bartek może ustalić pozycję okrętu zaznaczonego przez Agnieszkę?

3. ALI BABA I ROZBÓJNICY

Ali Baba został pojmany przez 42 rozbójników. Rozbójnicy mają jednak problem – głowią się nad sposobem podziału łupu złożonego z 41 jednakowych pałeczek cudownego kadzidła. Ali Baba zaproponował im szybkie i sprawne rozwiązanie tego problemu w zamian za uwolnienie.

Wszystkie pałeczki przeznaczone do podziału ułożył jedną obok drugiej w rząd, gdzie niektóre sąsiadujące pałeczki były względem siebie przesunięte, a następnie jednym cięciem długiej szabli dokonał podziału każdej z tych pałeczek na dwa kawałki.

Przykład ułożenia pałeczek ilustruje poniższy rysunek.



Taką operację powtarzał, stosując ją do wszystkich lub niektórych wcześniej otrzymanych kawałków tyle razy, aż otrzymał pożądany zbiór kawałków, który mógł podzielić na identyczne zestawy przeznaczone dla 42 rozbójników.

Zadanie to zrealizował w sposób optymalny, bo zestaw przeznaczony dla jednego rozbójnika składał się z możliwie najmniejszej liczby kawałków (niekoniecznie różnych) i przy tym wykonał możliwie najmniejszą liczbę cięć szablą. Ile cięć szablą wykonał Ali Baba i ile kawałków cudownego kadzidła otrzymał każdy rozbójnik?

4. ABRAKADABRA

Czarnoksiężnik powierza swojemu uczniowi magiczny wzór, który składa się z nieskończonej liczby par AB i BA złożonych z liter A i B.

„Kiedy poznasz cały ten magiczny wzór, osiągniesz najwyższy stopień wtajemniczenia".

Uczeń pisze ten wzór i chcąc zyskać na czasie zamienia każdą parę AB literą A, a każdą parę BA zastępuje literą B. O dziwo, po takiej redukcji magiczny wzór wcale się nie zmienił. Wypisz litery tego magicznego wzoru stojące na miejscach 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007 i 2008.

Matematyczne zmagania

Gry w matematyce rekreacyjnej (2)

W pierwszej części „Gier w matematyce elementarnej" w poprzednim numerze MMM rozwiązaliśmy kilka przykładowych zadań, w których występowały sytuacje konfliktowe, aby na tej podstawie wprowadzić Czytelnika do problematyki growej pojawiającej się często w matematyce rekreacyjnej, a także w zestawach zadań różnych konkursów matematycznych. Ten typ zadań cieszy się dużym uznaniem miłośników „łamania głowy", a ich rozwiązywanie dostarcza sporej intelektualnej satysfakcji.

Omówiliśmy prostą i naturalną metodę badania gier „od końca", która w przypadku gier o regularnej lub niezbyt zawiłej strukturze pozwala wyróżnić pozycje wygrywające w grze, a także strategię postępowania dla gracza wykonującego ruch z pozycji wygrywającej.

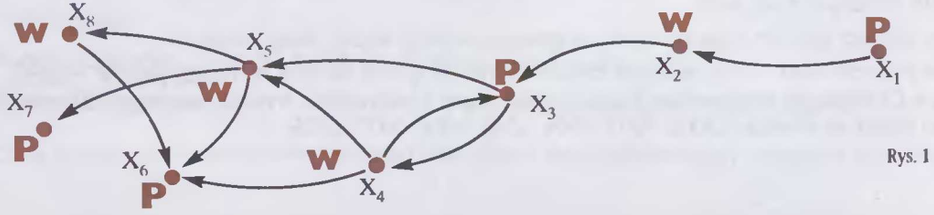
Obecnie kontynuujemy tematykę grową, ograniczając się do gier dwuosobowych opisywanych stosunkowo prostym modelem matematycznym, opartym na pojęciach teorii grafów skierowanych, które w naturalny sposób opisują przejścia procesu z jednego stanu do innego, a więc także ruchy w grach. W takim modelu łatwiej opisuje się rozgrywki i algorytmy postępowania, które można budować w oparciu o formuły matematyczne nie wykraczające poza zakres matematyki elementarnej.

Podobnie jak w części pierwszej, rozważane przez nas gry będą opisywane przez ustalenie:

- zbioru pozycji w grze,
- zbioru reguł określających ruchy dopuszczalne,
- pozycji początkowej w grze oraz zbioru pozycji końcowych,
- sposobu zakończenia rozgrywki i wyłonienia zwycięzcy lub ewentualnie zdefiniowanie rozgrywki remisowej.

Przyjmujemy, że gracze wykonują ruchy naprzemiennie, a pozycja powstała po ruchu jednego z graczy jest pozycją, z której wykonuje ruch drugi gracz. W naszym modelu gra kończy się, gdy jeden z graczy wykona ostatni możliwy ruch dopuszczalny w tej grze, tzn. ruch do pozycji końcowej i w większości przypadków ten gracz jest zwycięzcą. Ograniczymy się do gier bez remisów.

Z każdą grą można związać graf skierowany $G=\langle X,\Gamma\rangle$, gdzie X jest zbiorem pozycji w grze, a Γ jest funkcją przyporządkowującą każdemu elementowi x zbioru X pewien podzbiór $\Gamma(x)$, złożony z tych pozycji, które można osiągnąć w grze z pozycji x za pomocą ruchu dopuszczalnego. Funkcja Γ opisuje tę część reguł gry, które dotyczą ruchów dopuszczalnych, a równocześnie ustala zbiór pozycji końcowych w grze, gdyż są to te pozycje $y\in X$, dla których $\Gamma(y)$ jest zbiorem pustym ($\Gamma(y)=\emptyset$). Zbiór ruchów dopuszczalnych w grze jest wtedy utożsamiany ze zbiorem par uporządkowanych (x, y), gdzie $x\in X$ a $y\in\Gamma(x)$. W teorii grafów elementy zbioru X nazywa się wierzchołkami grafu $G=\langle X,\Gamma\rangle$, a pary (x, y), gdzie $x\in X$ i $y\in\Gamma(x)$, nazywa się łukami i w geometrycznej interpretacji grafu, np. na płaszczyźnie, pary te zaznaczane są łukami skierowanymi wychodzącymi z wierzchołka i kończącymi się w wierzchołku. Elementy zbioru X zaznaczane są punktami. Na rysunku 1 pokazany jest przykład grafu skierowanego o 8 wierzchołkach i 11 łukach.



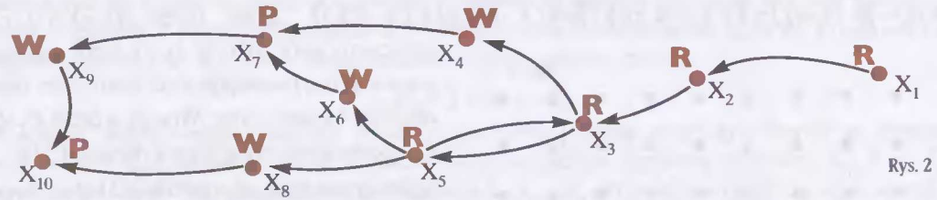
Rys. 1

W interpretacji growej graf ten przedstawia grę, w której zbiorem pozycji jest $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, a zbiór ruchów złożony jest z par

$$\{(x_1,x_2)(x_2,x_3)\ (x_3,x_4)\ (x_3,x_5)\ (x_4,x_3)\ (x_4,x_5)\ (x_4,x_6)\ (x_5,x_6)\ (x_5,x_7)\ (x_5,x_8)\ (x_8,x_6)\}.$$

W tym grafie funkcja Γ przyporządkowuje wierzchołkowi x_1 zbiór $\Gamma(x_1)=\{x_2\}$, wierzchołkowi x_4 zbiór $\Gamma(x_4)=\{x_3,x_5,x_6\}$, a np. wierzchołkom x_6 i x_7 zbiory puste $\Gamma(x_6)=\Gamma(x_7)=\emptyset$. Te dwa wierzchołki są w grze na tym grafie pozycjami końcowymi. Wykorzystując wspomnianą już metodę rozwiązywania gier „od końca", bez trudu wyznaczamy zbiory pozycji przegrywających i wygrywających w tej grze. Pozycje te zaznaczone są na rysunku literami P oraz W.

Inny przykład grafu pokazany jest na rys. 2.



Rys. 2

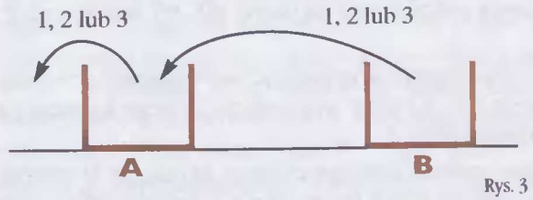
W grze na tym grafie wierzchołek x_{10} jest jedyną pozycją końcową. Stosując metodę wyznaczania zbiorów pozycji przegrywających i wygrywających, łatwo stwierdzimy, że pozycje x_{10} i x_7 są przegrywające, a pozycje x_9, x_8, x_6, x_4 są wygrywające, ale problem pojawia się przy próbie weryfikacji pozycji x_5 i x_3. Jeśli bowiem gracz znajdzie się w pozycji x_5 (np. drogą losowania lub w trakcie gry), to nie wykona ruchu do pozycji x_6 ani do pozycji x_8, bo te pozycje są wygrywające dla jego przeciwnika, a więc wykorzysta możliwość wykonania ruchu do pozycji x_3. Jego przeciwnik znajdzie się w sytuacji podobnej. Nie wykona ruchu do pozycji x_4, bo jest to pozycja wygrywająca dla przeciwnika, a więc wykona ruch bezpieczny do pozycji x_5. Jeżeli obaj gracze będą grali rozsądnie i bezpiecznie, to rozgrywka nigdy się nie skończy lub na podstawie powszechnie uznawanej umowy będzie remisowa. W takim przypadku należy przyjąć, że w tej grze pozycje x_5, x_3, x_2 i x_1 tworzą zbiór pozycji remisowych (R), a wtedy partycja growa gry będzie podziałem zbioru wszystkich pozycji na trzy rozłączne zbiory, tzn. na pozycje przegrywające (P), wygrywające (W) i remisowe (R).

Rozważyliśmy dwa przykłady tytułem ilustracji. Zbadajmy teraz graf i wyznaczmy partycję growską konkretnej gry.

Przykład 1

Na stole leżą dwa pudełka oznaczone literami A i B zawierające odpowiednio n i m żetonów. W grze tej możliwe są dwa rodzaje ruchów dopuszczalnych:

- możemy z pudełka A, jeśli nie jest ono puste, wziąć jeden, dwa albo trzy żetony i odłożyć je na stół,
- możemy z pudełka B, jeśli nie jest ono puste, wziąć jeden, dwa albo trzy żetony i przełożyć je do pudełka A.



Rys. 3

Żetony wybrane z pudełka i odłożone na stół nie biorą już udziału w dalszej grze.

Dwaj gracze, np. Marek i Romek, wykonują ruchy naprzemiennie i gra kończy się, gdy jeden z nich wykona ostatni dopuszczalny ruch, i ten gracz wygrywa. Po tym ruchu obydwa pudełka będą puste.

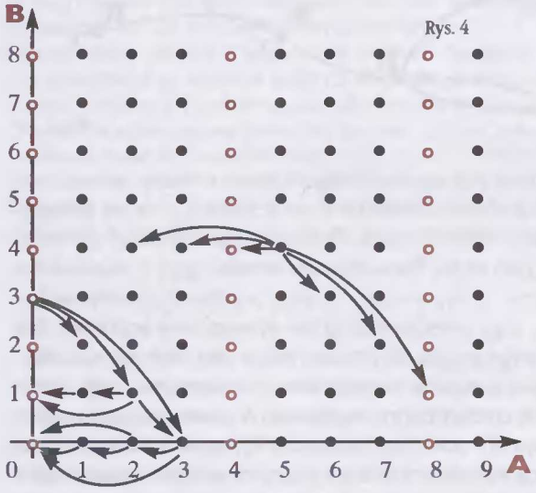
W tej grze pozycjami są pary (n, m) – liczby żetonów w pudełku A i w pudełku B, a ruchami są operacje przejścia

– od pary (n, m) do pary (n-1, m) lub (n-2, m) lub (n-3, m), przy założeniu, że pudełko A jest niepuste, albo

– od pary (n, m) do pary (n+1, m-1) lub (n+2, m-2) lub (n+3, m-3), jeśli oczywiście m>0.

Graf tej gry można przedstawić na płaszczyźnie jako zbiór punktów kratowych w pierwszej ćwiartce płaszczyzny z osiami współrzędnych „reprezentujących" pudełka A i B.

Na rysunku 4 zaznaczone są ruchy dopuszczalne z czterech pozycji: (0, 3), (2, 1), (3, 0) i (5, 4). Graf tej gry może być traktowany jako graf nieskończony, w którym wierzchołkami są wszystkie pary (n, m), gdzie $n \in N = \{0,1,2,...\}$ i $m \in N$, a funkcja Γ przyporządkowuje parze (m, n) zbiór $\Gamma(n,m) = \{(n-k,m): 1 \le k \le 3, n-k \ge 0\} \cup \{(n+l,n-l): 1 \le l \le 3, m-l \ge 3\}$, gdzie przez $\{(x,y): W(x,y)\}$ oznaczamy zbiór tych par (x, y), które spełniają warunki W(x, y) występujące po znaku : , tzn. mają własność wyrażoną przez W(x, y), a przez $P \cup Q$ oznaczamy sumę mnogościową zbiorów P i Q.



Rys. 4

Analiza growa tego grafu metodą „od końca" (tu od pozycji (0, 0)) pozwala dość szybko zauważyć, że pozycje zaznaczone na rysunku czarnymi punktami są w rozważanej grze przegrywające, a pozycje zaznaczone punktami kolorowymi są wygrywające. Struktura tego częściowego pokolorowania wierzchołków grafu skłania do przypuszczenia, że w grze na tym grafie partycja growa (podział wszystkich pozycji na przegrywające i wygrywające) jest następująca:

$$P = \{(n,m): n = 4k, k \in N, m \in N\},$$

$$W = \{(n,m): n = 4k + r, k \in N, r = 1,2,3, m \in N\}.$$

Ponieważ w tej grze liczba rozgrywek z każdej ustalonej pozycji początkowej jest skończona, każda rozgrywka kończy się w pozycji końcowej (0, 0) i kończy się wygraną jednego i przegraną drugiego gracza. Zatem hipotetyczne spostrzeżenie dotyczące partycji growej możemy sprawdzić odwołując się do dwóch własności charakteryzujących partycję growa gier omówionych w pierwszym numerze MMM.

Sprawdzimy więc, że:

1. każdy ruch z pozycji należącej do P prowadzi do pozycji znajdującej się w zbiorze W,

2. z pozycji należącej do W mamy co najmniej jeden ruch, który prowadzi do pozycji znajdującej się w P.

Istotnie, każdy ruch z pozycji $(4k, m)$ prowadzi albo do pozycji $(4(k-1)+r, m)$, 0<r<4, albo do pozycji $(4k+r, m-r)$, gdzie 1<r<3, a więc zawsze prowadzi do pozycji należącej do W. Natomiast z pozycji $(4k+r, m)$, 0<r<4, należącej do W można zawsze wykonać ruch do pozycji $(4k, m)$ należącej do P, wybierając r żetonów z pudełka A.

Otrzymany opis zbioru pozycji przegrywających i zbioru pozycji wygrywających w rozważanej grze ustala też strategię wygrywającą dla gracza wykonującego ruch z pozycji wygrywającej. Strategia ta polega na pozostawianiu w pudełku A liczby żetonów podzielnej przez 4.

Omówiony przykład gry, a także wcześniej podane przykłady ilustrujące pokazują, że opis gier za pomocą grafów może pomóc w rozwiązywaniu tych gier, gdyż na grafach łatwiej odczytuje się wzajemne związki pomiędzy elementami konfiguracji graficznych niż związki zachodzące pomiędzy konfiguracjami arytmetycznymi czy też mnogościowymi. Pokażemy dalej, że opis gry w języku teorii grafów pozwala rozszerzyć technikę rozwiązywania gier o nowe metody wykorzystujące pewien specyficzny sposób cechowania wierzchołków grafu oraz odpowiednio dobrane działania algebraiczne. Uzyskuje się tą drogą bardzo proste algorytmy oparte na elementarnych działaniach arytmetycznych.

Dlatego w dalszej części będziemy rozważali gry na grafach skierowanych, przyjmując, że zbiór wierzchołków grafu jest zbiorem pozycji w grze, a zbiór łuków – jest zbiorem ruchów dopuszczalnych w tej grze. W tym popularnym artykule nie mamy możliwości przedstawienia pełnej teorii gier na grafach. Ograniczymy się jedynie do pewnego fragmentu tej teorii, zawężając rozważania do pewnej klasy grafów skierowanych.

Będziemy rozważać tylko gry dwuosobowe, w których gracze wykonują ruchy naprzemiennie, pozycja powstała po ruchu jednego z graczy jest pozycją, z której wykonuje ruch drugi gracz. Rozgrywka rozpoczyna się z pewnej pozycji początkowej x_0 określonej regułami gry lub w jakiś inny sposób, np. drogą losowania. Z tej pozycji początkowej x_0 pierwszy ruch wykonuje jeden z graczy, a rozgrywka jest ciągiem pozycji x_0, x_1, x_2... lub, mówiąc dokładnie, ciągiem pozycji i ruchów

$$x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), x_2, \ldots,$$

w którym każda następna pozycja powstaje po ruchu jednego z graczy. Pozycje o numerach nieparzystych x_{2k+1} powstają po ruchu gracza rozpoczynającego rozgrywkę, a pozycje x_{2k}, k=1, 2,..., powstają po ruchu drugiego gracza. Jeżeli rozgrywka $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jest skończona i kończy się w pozycji x_n, z której nie można już wykonać ruchu, to rozgrywkę taką wygrywa ten z graczy, który wykonał ostatni dopuszczalny ruch. Tym graczem jest rozpoczynający rozgrywkę, jeżeli n jest liczbą nieparzystą, albo jego przeciwnik, gdy n jest liczbą parzystą. Ponieważ x_n jest pozycją końcową, więc $\Gamma(x_n)$ jest zbiorem pustym. Rozgrywka rozpoczynająca się z pozycji x_0 może być na każdym etapie gry przedłużana przez każdego z graczy i jeśli obaj takie decyzje będą stale podejmować, to rozgrywka taka nie skończy się nigdy, albo zostanie przerwana na podstawie odpowiednich umów regulaminowych. Przyjmuje się, że takie rozgrywki są remisowe. Rozgrywki remisowe mogą zdarzyć się nie tylko na grafach o nieskończonej liczbie wierzchołków. Wystarczy powrócić do przykładu gry na grafie pokazanym na rys. 2. Gry rozważane w tym artykule będą zawsze kończyć się wygraną jednego z graczy, więc remisów nie będzie.

W teorii grafów ciąg wierzchołków $x_0, x_1, \ldots, x_n$, gdzie $x_n \in \Gamma(x_{k-1}) k = 1,2,\ldots,n$, nazywa się drogą skierowaną rozpoczynającą się w wierzchołku x_0 i kończącą się w wierzchołku x_n, a liczba n (liczba łuków, przez które ta droga przechodzi) jest długością tej drogi. Droga $x_0, x_1, \ldots, x_n$, w której $x_n = x_0$, nazywa się cyklem przechodzącym przez wierzchołki $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, a grafy niezawierające cykli nazywa się acyklicznymi. W niniejszym artykule rozważać będziemy gry na grafach acyklicznych. Ponadto grafy te będą spełniały dodatkowo dwa warunki:

– wszystkie zbiory $\Gamma(x)$, a także zbiory $\Gamma^{-1}(x)$ złożone z tych wierzchołków grafu $\langle X, \Gamma \rangle$, w których zaczynają się łuki dochodzące do wierzchołka x, są skończone,

– z każdego wierzchołka wychodzi skończona liczba różnych dróg, każda z tych dróg kończy się w pewnym wierzchołku końcowym, a zbiór wszystkich wierzchołków końcowych jest też skończony.

W grach na takich grafach każda rozgrywka rozpoczynająca się w jakiejś pozycji początkowej x_0, kończy się po skończonej liczbie ruchów w pewnej pozycji końcowej, jeden z graczy wygrywa, a drugi przegrywa, niezależnie od tego, czy zbiór wszystkich wierzchołków grafu jest skończony, czy nie.

Ważną rolę w rozwiązywaniu gier na grafach odgrywa pewna funkcja wprowadzona w 1939 roku przez P. M. Grundy'ego, którą nazywa się funkcją Grundy'ego grafu. Funkcja ta przyporządkowuje wierzchołkom grafu cechy liczbowe, które mają interpretację growa i umożliwiają w wielu przypadkach wyznaczenie pozycji przegrywających i wygrywających w grze na tym grafie.

Funkcja g przyporządkowująca wierzchołkom grafu $G = \langle X, \Gamma \rangle$ liczby całkowite nieujemne jest funkcją Grundy'ego grafu G, jeżeli spełnia ona dwa następujące warunki:

G1. Jeżeli $y\in\Gamma(x)$, to $g(y)\neq g(x)$,

G2. Dla każdej liczby całkowitej nieujemnej d mniejszej od liczby $g(x)$, w zbiorze $\Gamma(x)$ znajduje się co najmniej jeden taki wierzchołek y, na którym funkcja g przyjmuje wartość $g(y)=d$.

Pierwszy warunek definicji funkcji Grundy'ego orzeka, że wartości funkcji g na końcach łuków wychodzących z wierzchołka x muszą być różne od wartości tej funkcji w wierzchołku x ($g(y)\neq g(x)$, dla $y\in\Gamma(x)$).

Drugi warunek orzeka, że jeśli funkcja g ma w wierzchołku x wartość $g(x)$, to na końcach łuków wychodzących z wierzchołka x musi osiągnąć każdą wartość całkowitą mniejszą od $g(x)$. Jeżeli np. w pewnym wierzchołku x funkcja ta ma wartość $g(x)=6$, to na końcach łuków wychodzących z x musi przyjąć każdą wartość od 0 do 5. Z warunku G2 wynika ważne spostrzeżenie, że jeśli x jest wierzchołkiem końcowym w grze na grafie i g jest funkcją Grundy'ego tego grafu, to $g(x)=0$. To spostrzeżenie pozwala konstruować funkcję Grundy'ego, rozpoczynając od wierzchołków końcowych, tzn. „od końca", podobnie jak w przypadku wyznaczania partycji growej.

Jeżeli przyjrzymy się dokładnie tym dwóm warunkom, to zauważymy, że wyrażają one łącznie bardzo ważną własność funkcji Grundy'ego.

Wartość funkcji Grundy'ego w wierzchołku x jest najmniejsza z tych liczb całkowitych nieujemnych, które nie zostały wykorzystane do cechowania końców łuków wychodzących z wierzchołka x.

To spostrzeżenie pozwala podać inną, równoważną definicję funkcji Grundy'ego:

Funkcja g określona na wierzchołkach grafu $G=\langle X,\Gamma\rangle$ i przyjmująca wartości całkowite nieujemne, jest funkcją Grundy'ego grafu G, jeżeli dla każdego wierzchołka x tego grafu $g(x)=\min\{N\setminus\{g(y): y\in\Gamma(x)\}\}$.

W tej równości przez $\{g(y): y\in\Gamma(x)\}$ oznaczamy zbiór tych wartości funkcji g, które ona przyjmuje na zbiorze $\Gamma(x)$, przez $A\setminus B$ oznaczamy różnicę zbiorów A i B, przez N oznaczamy zbiór $\{0,1,2,3,..\}$, a min Z, gdzie Z jest niepustym podzbiorem zbioru N, oznacza najmniejszą liczbę w zbiorze Z.

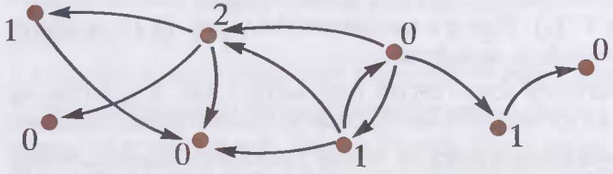
Czytelnik przyzwyczajony do formalnego zapisywania sformułowań matematycznych, może warunki G1 i G2 definiujące funkcję Grundy'ego zapisać w następujący sposób:

$$G1\quad \forall y\in\Gamma(x)(g(y)\neq g(x))$$

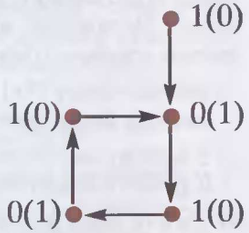
$$G2\quad \forall d\in N, d<g(x)\ \exists y\in\Gamma(x)(g(y)=d)$$

Przykłady grafów oraz ich funkcji Grundy'ego podane są na rysunkach 5 i 6. Wartości funkcji Grundy'ego podane są obok wierzchołków grafów.

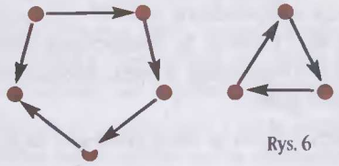
Graf po prawej stronie ma dwie różne funkcje Grundy'ego



Rys. 5



Nie każdy graf ma funkcję Grundy'ego. Nie mają takiej funkcji grafy będące cyklami nieparzystej długości (rys. 6).



Rys. 6

Wyjaśnijmy, dlaczego cykl długości 3 nie ma funkcji Grundy'ego. Przypuśćmy, że g jest taką funkcją. Funkcja ta musiałaby na pewnym wierzchołku przyjmować wartość 0. Gdyby np. $g(x)=0$, to liczba $g(y)$ musiałaby być dodatnia, ale wtedy liczba $g(z)$ musiałaby być równa 0. Nie jest to jednak możliwe, gdyż nie może być równocześnie $g(x)=0$ i $g(z)=0$.

Rozważane przez nas gry opisywane są grafami, które mają funkcję Grundy'ego.

Pierwszy kontakt z funkcją Grundy'ego może wzbudzać różne odczucia, gdyż sama definicja tej funkcji może wydawać się dziwna i nienaturalna, a jej ewentualne związki z grami na grafach są na pierwszy rzut oka zupełnie niewidoczne. Okazuje się jednak, że funkcja ta ma nie tylko silne związki z grami na grafach, ale w wielu przypadkach rozwiązuje takie gry.

Weźmy graf $G=\langle X,\Gamma\rangle$, na którym określona jest funkcja Grundy'ego g i rozważmy dwa zbiory: $S=\{x\in X: g(x)=0\}$ i $T=\{x\in X: g(x)>0\}$. Oczywiście $S\cap T=\emptyset$ i $T=X\setminus S$. Funkcja g rozdziela więc wszystkie pozycje w grze na grafie G na dwa rozłączne zbiory S i T. Podział ten ma prostą interpretację grową.

Załóżmy bowiem, że gracz biorący udział w grze znajduje się w pozycji x należącej do zbioru S. Ponieważ do zbioru S należą wszystkie pozycje końcowe w tej grze, gracz ten albo nie może wykonać już ruchu dopuszczalnego i przegrywa, albo jeśli może wykonać ruch, to tylko do pozycji znajdującej się w zbiorze T. Wynika to stąd, że z pozycji należącej do S nie można wykonać ruchu do pozycji y znajdującej się w S, gdyż z pierwszego warunku definicji funkcji Grundy'ego musi być $g(y)\neq g(x)$, a $g(x)=0$. Z drugiej strony, jeśli gracz znajduje się w pozycji x należącej do zbioru T, to $g(x)\neq 0$, a więc może on na pewno wykonać ruch, co więcej, może on wykonać ruch do pozycji znajdującej się w zbiorze S. Te dwa spostrzeżenia wyjaśniają, jaką rolę w grze na grafie G odgrywa funkcja Grundy'ego tego grafu, gdyż dokonuje ona podziału wszystkich pozycji w grze na część S złożoną z pozycji przegrywających i być może niektórych pozycji remisowych oraz na część T złożoną z pozycji wygrywających i pozostałych pozycji remisowych. Oznacza to, że gracz wykonujący ruch z pozycji należącej do S może najwyżej zremisować, a gracz wykonujący ruch z pozycji należącej do T nie przegra, o ile oczywiście gracze będą grali umiejętnie.

W grach, gdzie każda rozgrywka kończy się w pewnej pozycji końcowej wygraną jednego i przegraną drugiego gracza, funkcja Grundy'ego dokonuje podziału wszystkich pozycji w grze na przegrywające i wygrywające, a więc wyznacza partycję grową tej gry. W takich przypadkach zbiorem pozycji przegrywających jest $P=\{x\in X: g(x)=0\}$, a zbiorem pozycji wygrywających jest $W=\{x\in X: g(x)\neq 0\}$.

Strategia wygrywająca gracza znajdującego się w pozycji $x\in W$ polega na doprowadzaniu przeciwnika do pozycji $y\in P$, tzn. do pozycji o zerowej wartości funkcji g.

Podajemy kilka przykładów grafów oraz funkcji Grundy'ego określonych na tych grafach.

Przykład 2

Na stole leży kupka zapałek. Każdy z graczy w każdym ruchu może wziąć z niej jedną, dwie lub cztery zapałki. Wygrywa ten, kto weźmie ostatnie zapałki.

Wierzchołkami grafu tej gry są liczby całkowite nieujemne, a funkcja Γ określona jest w sposób następujący: $\Gamma(0)=\emptyset, \Gamma(n)=\{m\in N: m=n-k, k=1,2,4, n-k\geq 0\}$ dla $n>0$.

W grze na tym grafie jedyną pozycją końcową jest 0. Gdy narysujemy fragment tego grafu, to rozpoczynając od pozycji 0 łatwo wyznaczymy wartości funkcji Grundy'ego dla kolejnych pozycji 0, 1, 2, ..., 12. Wystarczy zauważyć, że $g(0)=0$ i kolejno sprawdzać warunki G1 i G2 definicji funkcji Grundy'ego. Otrzymane wyniki można przedstawić w tabelce.

n	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Obserwując tę tabelkę oraz ewentualnie przedłużony fragment rozważanego grafu, dochodzimy do przekonania, że funkcja Grundy'ego g(n) jest okresowa i ma okres 3, tzn. $g(3k)=0$, $g(3k+1)=1$ i $g(3k+2)=2$ dla $k=0, 1, 2, ...$, co można zanotować jednym wzorem: $g(n)=[n]_3$,

gdzie przez $[n]_p$ oznaczamy resztę z dzielenia liczby n przez liczbę całkowitą p. Można też funkcję g(n) przedstawić innym wzorem, wykorzystując oznaczenie na część całkowitą liczby rzeczywistej

$$g(n)=3\left(\frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right]\right)$$

Dowód zaobserwowanego faktu, że funkcja Grundy'ego rozważanego grafu jest okresowa o okresie 3 można przeprowadzić, wykorzystując zasadę indukcji matematycznej. Dowodu tego nie będziemy tu podawać.

Mając funkcję g(n) wyznaczamy zbiór pozycji przegrywających w tej grze $P=\{n\in N: g(n)=0\}=\{n\in N: n=3k\}$ oraz zbiór pozycji wygrywających $W=\{n\in N: g(n)\neq 0\}=\{n\in N: n=3k+1, \text{lub } n=3k+2\}$, a także odnajdujemy strategię wygrywającą z pozycji należącej do W.

Przykład 3

Rozważmy inną grę na zapałkach, w której z kupki zapałek można zabierać każdą nieparzystą liczbę zapałek, nie większą oczywiście od liczby zapałek w kupce.

Graf tej gry $G=\langle N,\Gamma\rangle$ ma zbiór wierzchołków $N=\{0,1,2,..\}$ a funkcja Γ ma postać $\Gamma(0)=\varnothing$, $\Gamma(n)=\{m\in N: m=n-k, k\in\{1,3,5,...\} n-k\geq 0\} n\geq 1$.

Czytelnik łatwo sprawdzi, że funkcja Grundy'ego tego grafu jest bardzo prosta, gdyż $g(2k)=0$ i $g(2k+1)=1$ dla dowolnych $k=0,1,2,...$, co można wyrazić wzorem

$$g(n)=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)$$

Przykład 4

Powróćmy do gry na zapałkach omówionej w pierwszym numerze MMM, w której z kupki zapałek można brać od jednej do p zapałek, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną większą niż 1.

Rysując odpowiedni fragment grafu tej gry i rozpoczynając od pozycji 0 z łatwością zauważymy, że funkcja Grundy'ego tego grafu jest okresowa, ma okres $p+1$ i jej wartość w pozycji n jest resztą z dzielenia liczby n przez liczbę $p+1$, tzn.

$$g(n)=[n]_{p+1}=(p+1)\left(\frac{n}{p+1}-\left[\frac{n}{p+1}\right]\right), n=0,1,2,...$$

Przykład 5

Rozważmy graf omówiony w przykładzie 1. Wykorzystując podany tam fragment tego grafu, możemy, rozpoczynając od pozycji (0, 0) wyznaczyć wartości funkcji Grundy'ego dla pozycji leżących w otoczeniu tej pozycji i zauważyć, że funkcja ta ma prostą postać $g(n,m)=[n]_4$, a więc jej wartości nie zależą od ilości żetonów w pudełku B, a okresowo zmieniają się przy zmianie liczby żetonów w pudełku A.

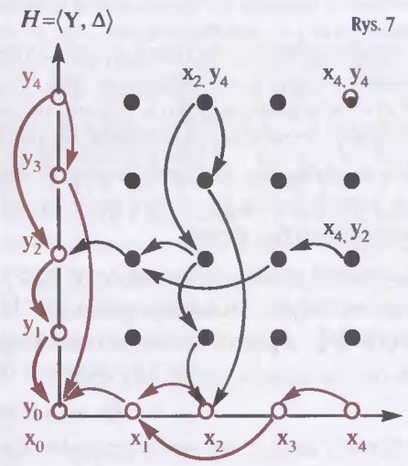
***

Ostatnia część tego artykułu wymaga od Czytelnika pewnego doświadczenia w technice dowodzenia stwierdzeń matematycznych i jej fragmenty zawierające dowody mogą być w pierwszym czytaniu pominięte. Zajmiemy się badaniem rozgrywek przebiegających według ustalonych zasad na dwóch lub kilku grafach reprezentujących niekoniecznie takie same gry. Mogą to być np. rozgrywki przeprowadzane w taki sposób, że każdy z graczy na każdym etapie gry wybiera jeden z możliwych grafów i wykonuje ruch tylko na tym grafie, pozostawiając niezmienione pozycje na pozostałych grafach. Przyjmujemy, że gra kończy się, gdy po ruchu jednego z graczy nie można już wykonać ruchu na żadnym z grafów i ten gracz jest zwycięzcą. Taki sposób gry na kilku grafach (np. na kilku planszach) można nazwać grą alternatywną na tych grafach i traktować jak grę na jednym grafie, który jest pewną kompozycją grafów i nazywa się sumą lub alternatywą grafów. Taką sumę dwóch grafów $G=\langle X,\Gamma\rangle$ i $H=\langle Y,\Delta\rangle$ oznaczamy przez G+ H. Jest to graf $\langle Z,\Phi\rangle$, w którym zbiór wierzchołków złożony jest z par (x, y), gdzie $x\in X$ i $y\in Y$, a funkcja Φ

wierzchołkowi (x,y) przyporządkowuje zbiór

$$\Phi(x,y)=\{(\Gamma(x), y)\}\cup\{(x,\Delta(y))\},$$

gdzie np. $\{(\Gamma(x), y)\}$ oznacza zbiór wszystkich par (u, y), w których y jest ustalone, a u przebiega zbiór $\Gamma(x)$, tzn. $\{(\Gamma(x), y)\}=\{(u, y): u\in\Gamma(x)\}$. Zbiór wszystkich par (x, y), $x\in X$ i $y\in Y$, nazywa się iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y i oznacza się go przez Z= X× Y, a graf $\langle Z,\Phi\rangle$ interpretuje się jako zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y). W tym układzie oś pozioma reprezentuje graf G, a oś pionowa graf H. Na rysunku 7 pokazany jest przykład sumy G+ H dwóch grafów $G=\langle X,\Gamma\rangle$ i $H=\langle Y,\Delta\rangle$, z których każdy ma 5 wierzchołków.



Rys. 7

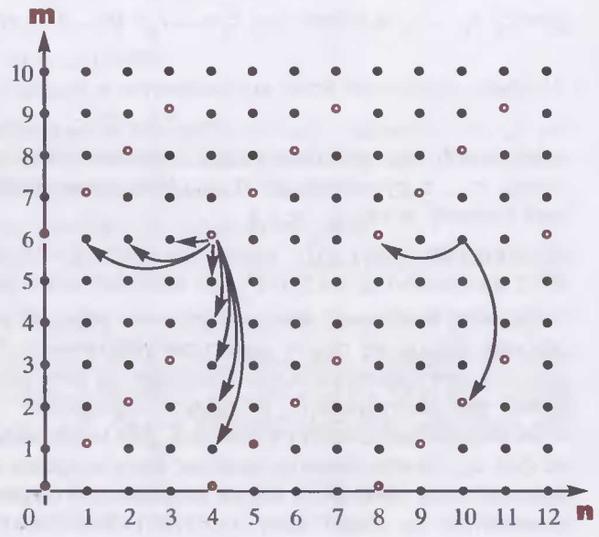
Graf ten złożony jest z 25 wierzchołków oraz pięciu kopii grafu $\langle X,\Gamma\rangle$ ułożonych poziomo i pięciu kopii grafu $\langle Y,\Delta\rangle$ ułożonych pionowo. Na rysunku pokazano jedną kopię grafu G i jedną kopię grafu H i na kolorowo zaznaczono łuki wyjściowych grafów G i H.

W grze alternatywnej na grafach G i H ruchy wykonuje się albo na G, albo na H, co oznacza, że w grze na grafie G + H ruchy wykonuje się albo poziomo z regułami obowiązującymi w G, albo pionowo ale z regułami obowiązującymi w H.

Zbadamy jedną z najprostszych gier alternatywnych na dwóch kupkach zapałek.

Przykład 6

Na stole leżą dwie kupki zapałek. W pierwszej jest n, a w drugiej m zapałek. W każdym ruchu można wybrać jedną z kupek i jeśli to kupka pierwsza, to wziąć z niej jedną, dwie lub trzy zapałki, a jeśli jest to kupka druga, to wziąć z niej od jednej do pięciu zapałek. Dwaj gracze wykonują ruchy naprzemiennie i wygrywa ten, kto weźmie ze stołu ostatnie zapałki. Pozycjami w tej grze są pary liczb. Mówią one, ile w danym momencie jest zapałek w pierwszej i drugiej kupce. Jakie pozycje (n, m) są wygrywające dla gracza wykonującego ruch z tej pozycji?



Rys. 8

Jest to gra alternatywna na dwóch grafach:
$G=\langle N,\Gamma\rangle$ i $H=\langle N,\Delta\rangle$, gdzie
$\Gamma(n)=\{k: k=n-r, r=1,2,3, n-r\geq 0\}$ i
$\Delta(m)=\{k: k=m-r, r=1,2,3,4,5, m-r\geq 0\}$,
tzn. gra na grafie $F=G+H=\langle N\times N,\Phi\rangle$,
gdzie $\Phi(n,m)=\{(\Gamma(n), m)\}\cup\{(n,\Delta(m))\}$.

Jeśli narysujemy odpowiednio duży fragment grafu F i będziemy rozwiązywać grę na tym grafie poznaną wcześniej metodą „od końca", to dość szybko zauważymy, że pozycje przegrywające w tej grze układają się bardzo regularnie. Na rys. obok są to kolorowe punkty.

Na podstawie tej obserwacji możemy wnosić, że zbiór pozycji przegrywających na grafie **F** składa się z par (n, m), gdzie $n=4k+r$, $m=6l+r$, $k,l=0,1,2,...$, $r=0,1,2,3$. Jeśli dobrze przyjrzymy się tym parom, to zauważymy, że są to pary liczb całkowitych nieujemnych (n, m), z których pierwsza ma przy dzieleniu przez 4 resztę równą reszcie otrzymanej z dzielenia drugiej liczby, ale przez 6. Jeżeli więc wniosek z naszych obserwacji jest prawdziwy, to otrzymujemy stąd partycję growa grafu **G**:

$$P=\{(n,m):[n]_4=[m]_6\},$$

$$W=\{(n,m):[n]_4\neq[m]_6\},$$

a zarazem metodę rozgrywania gry, gdyż strategia wygrywająca dla gracza wykonującego ruch z pozycj wygrywającej polega na wyrównywaniu reszt. Np. gracz wykonujący ruch w tej grze z pozycji (19, 25) ma dwa dobre ruchy gwarantujące mu wygraną, może bowiem wziąć z pierwszej kupki 2 zapałki albo z drugiej kupki 4 zapałki i doprowadza przeciwnika do pozycji przegrywającej (17, 25) lub (19, 21).

Aby przekonać się, że podany wyżej podział zbioru wszystkich pozycji w grze na grafie **F** jest rzeczywiście partycją growa gry na tym grafie, wystarczy sprawdzić podane w pierwszym numerze MMM dwie własności partycji growej.

Zauważmy jeszcze, że podane wyżej zbiory pozycji przegrywających i wygrywających mogą być opisane poprzez funkcje Grundy'ego grafów **G** i **H**. Z przykładu 4 wiemy, że graf **G** ma funkcję Grundy'ego $g(n)=[n]_4$, a graf **H** ma funkcję Grundy'ego $h(m)=[m]_6$. Jeżeli wykorzystamy te funkcje, to zbiory **P** i **W** można opisać w następujący sposób:

$$P=\{(n,m):g(n)=h(m)\},\ W=\{(n,m):g(n)\neq h(m)\}.$$

Można by zapytać, czy jest to przypadek, czy też dla gier alternatywnych możliwy jest zawsze opis pozycji przegrywających i wygrywających poprzez funkcje Grundy'ego grafów występujących w tej grze. Pozytywną odpowiedź na to pytanie daje pewne twierdzenie P. M. Grundy'ego, które podamy po omówieniu bardzo dziwnej operacji dodawania w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Aby tę operację wprowadzić, będziemy musieli liczby całkowite zapisywać w dwójkowym układzie pozycyjnym.

Przyzwyczajeni jesteśmy do tego, że liczby całkowite pisze się w układzie pozycyjnym dziesiątkowym przy użyciu cyfr 0, 1,..., 9. W tym układzie liczbę m rozkłada się na sumę potęg liczby 10

$$m=10^k c_k+10^{k-1}c_{k-1}+...+10c_1+c_0$$

gdzie c_0, c_1, ..., c_n są cyframi, tzn. $c_0,c_1,...,c_k\in\{0,1,...,9\}$, i stosuje się umowny skrót pisząc

$$m=c_k c_{k-1}...c_1 c_0\ .$$

W układzie dwójkowym liczbę m przedstawimy w postaci sumy potęg liczby 2:

$$m=2^k c_k+2^{k-1}c_{k-1}+...+2c_1+c_0$$

w taki sposób, aby każda potęga liczby 2 występowała w tej sumie co najwyżej jeden raz, a więc żeby cyfry c_0, c_1,..., c_k były równe albo 0, albo 1. Podobnie jak w systemie dziesiątkowym stosujemy umowny skrót i piszemy $m=(c_k c_{k-1}...c_1 c_0)_2$.

W przypadku liczby 87, mamy $87=2^6+23=2^6+2^4+7=2^6+2^4+2^2+3=2^6+2^4+2^2+2+1$, a więc $87=2^6\cdot1+2^5\cdot0+2^4\cdot1+2^3\cdot0+2^2\cdot1+2^1\cdot1+1$, lub w skróconym zapisie $87=(1010111)_2$.

Zaletą układu dwójkowego jest to, że jest w nim mało cyfr, ale wadą jest to, że nawet niezbyt duże liczby całkowite zapisuje się długim ciągiem zero-jedynkowym. Pomimo tej wady układ dwójkowy będzie użyteczny przy znajdowaniu funkcji Grundy'ego dla sumy grafów, a tym samym przy wyznaczaniu partycji growej gier alternatywnych. W naszych rozważaniach wygodniej będzie zmienić porządek cyfr w dwójkowym zapisie liczby na odwrotny, gdyż wtedy wszystkie liczby będą zapisywane rozpoczynając od cyfry c_0. Ponadto możemy zapisywać liczby w sposób jednolity za pomocą ciągu nieskończonego złożonego z zer i jedynek, w którym wszystkie cyfry od pewnego miejsca są równe 0. Teraz liczbę 87 przedstawimy w postaci sumy $1+2\cdot1+2^2\cdot1+2^3\cdot0+2^4\cdot1+2^5\cdot0+2^6\cdot1$ lub ciągu siedmioelementowego

1110101 lub ciągu nieskończonego 1110101000..., gdzie od pewnego miejsca są same zera. Dla dowolnej liczby całkowitej m będziemy mieli: $m=c_0+2\cdot c_1+2^2\cdot c_2+..+2^k\cdot c_k=c_0c_1...c_k=c_0c_1...c_kc_{k+1}...$, gdzie $c_{k+1}=c_{k+2}=...=0$.

Opuszczamy też znak 2, który informuje, że stosujemy układ pozycyjny dwójkowy, gdyż będziemy rozważać tylko ciągi zero-jedynkowe przedstawiające liczby całkowite w układzie dwójkowym. Przyjmując powyższe umowy, liczbę zero napiszemy ciągiem złożonym z samych zer.

W zbiorze liczb całkowitych nieujemnych $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,...\}$ wprowadzimy pewną operację „dodawania" oznaczaną przez $\dot{+}$, która może na pierwszy rzut oka wydawać się dziwaczną, gdyż wyraźnie odbiega od znanego nam dodawania liczb całkowitych. Jak się jednak dalej okaże, operacja ta pozwoli ustalić proste wzory matematyczne do budowy funkcji Grundy'ego sumy $\mathbf{G}\dot{+}\mathbf{H}$, poprzez znane nam funkcje Grundy'ego grafów **G** i **H**.

Przedstawmy liczby $a,b\in\mathbf{N}$ w postaci ciągów zero-jedynkowych $a=a_0a_1a_2...$ i $b=b_0b_1b_2...$, i oznaczmy przez c ciąg $c_0c_1c_2...$ otrzymany z ciągów a i b w taki sposób, że dla każdego $k=0,1,2,...$ $c_k=a_k\dot{+}b_k$, gdzie znak $\dot{+}$ oznacza dodawanie modulo 2 w zbiorze $\{0,1\}$, tzn. $0\dot{+}0=0$, $0\dot{+}1=1\dot{+}0=1$, ale $1\dot{+}1=0$. Dodawanie $\dot{+}$ na zbiorze cyfr układu dwójkowego daje w wyniku cyfrę z tego układu i może być traktowane jako zwykłe dodawanie, po którym z otrzymanej sumy pozostawia się resztę z dzielenia przez 2.

Ciąg $c_0c_1c_2...$ otrzymany w ten sposób z ciągów $a_0a_1a_2...$ i $b_0b_1b_2...$ jest dwójkowym zapisem liczby całkowitej c, którą nazywamy sumą liczb a i b w dodawaniu $\dot{+}$ i piszemy $c=a\dot{+}b$. Gdyby kolejne cyfry liczby $a=a_0a_1a_2...$ nazwać współrzędnymi tej liczby w układzie dwójkowym, to dodawanie $\dot{+}$ można traktować jako operację dodawania modulo 2 po współrzędnych dodawanych liczb

$$\begin{array}{rcccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \dot{+} & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ \hline & c_0 & c_1 & c_2 & \dots \end{array}$$

gdzie $c_k=a_k\dot{+}b_k$, $k=0,1,2,...$

Np. $7\dot{+}6=111000...\dot{+}011000...=1000000...=1$,

natomiast $9\dot{+}16=1001000...\dot{+}0000100...=1001100...=25$

Czytelnik może sprawdzić, że chociaż operacja $\dot{+}$ odbiega wyraźnie od zwykłego dodawania, to ma ona na zbiorze **N** własności zwykłego dodawania i wynik tej operacji jest nadal elementem zbioru **N**. W szczególności mamy:

1°($\dot{+}$) $a\dot{+}b=b\dot{+}a$ (przemienność)

2°($\dot{+}$) $a\dot{+}(b\dot{+}c)=a\dot{+}(b\dot{+}c)$ (łączność)

3°($\dot{+}$) $a\dot{+}0=a$

Natomiast $a\dot{+}a=0$ i ta własność nie występuje w zwykłym dodawaniu. Zauważmy też, że jeśli $a\dot{+}b=0$, to musi być $b=a$. Oznacza to, że w tym działaniu liczba przeciwna do liczby a jest tą samą liczbą a, a odejmowanie $\dot{-}$, tzn. działanie przeciwne do dodawania $\dot{+}$, pokrywa się z $\dot{+}$.

Dodawanie $\dot{+}$ nie zachowuje także porządku naturalnego w zbiorze $N=\{0,1,2,..\}$.

Jest jednak prawdziwa pewna własność operacji $\dot{+}$, która w pewnym stopniu wiąże to działanie z naturalnym porządkiem w zbiorze *N*.

4°($\dot{+}$) Jeżeli $c<a\dot{+}b$, to $c=x\dot{+}b$, gdzie $x<a$, lub $c=a\dot{+}y$, gdzie $y<b$.

Aby uzasadnić tę własność załóżmy, że $a=a_0a_1a_2...$, $b=b_0b_1b_2...$, $c=c_0c_1c_2...$ i połóżmy $a\dot{+}b=d=d_0d_1d_2...$ Warunek $c<d$ oznacza, że $c_0+2c_1+...+2^rc_r+2^{r+1}c_{r+1}+...<d_0+2d_1+...+2^rd_r+2^{r+1}$, a więc istnieje wskaźnik r taki, że $c_r=0$ i $d_r=1$ oraz $c_s=d_s$ dla $s>r$. Ponieważ $d_r=a_r\dot{+}b_r$, więc albo $a_r=0$ i $b_r=1$, albo $a_r=1$ i $b_r=0$.

W pierwszym przypadku liczba y spełniająca równanie $c=a\dot{+}y$ i nierówność $y<b$ ma postać $y=y_0y_1y_2...$, gdzie $y_r=0$, $y_s=b_s$ dla $s>r$ oraz dla $s<r$

$$y_s = \begin{cases} b_s & \text{, gdy } c_s = d_s \\ 1 - b_s & \text{, gdy } c_s \neq d_s \end{cases}$$

W przypadku $a_r=1$ i $b_r=0$, szukana liczba x ma postać $x=x_0 x_1 x_2 \ldots$, gdzie $x_r=0$, $x_s=a_s$ dla $s>r$ oraz dla $s<r$.

$$x_s = \begin{cases} a_s & \text{, gdy } c_s = d_s \\ 1 - a_s & \text{, gdy } c_s \neq d_s \end{cases}$$

Tak otrzymana liczba x spełnia nierówność $x<a$ i równanie $c = x + b$.

Możemy teraz podać twierdzenie M. P. Grundy'ego o postaci funkcji Grundy'ego grafu $G + H$.

Twierdzenie (M. P. Grundy). Jeżeli $g(x)$ i $h(y)$ są funkcjami Grundy'ego grafów $G=\langle X,\Gamma\rangle$ i $H=\langle Y,\Delta\rangle$, to funkcja $f(x,y)=g(x)\,g(y)$ jest funkcją Grundy'ego grafu $F = G + H=\langle X\times Y,\Phi\rangle$, gdzie $\Phi(x,y)=\{\{\Gamma(x),y\}\}\cup\{\{x,\Delta(y)\}\}$

Wystarczy sprawdzić, że spełnione są dwa warunki G1 i G2 definiujące funkcję Grundy'ego. Warunek G1 otrzymujemy natychmiast korzystając z własności dodawania $+$. Istotnie, jeśli wierzchołek (u, v) grafu F należy do $\Phi(x,y)$, to albo $u\in\Gamma(x)$ i $v=y$, albo $u=x$ i $v\in\Delta(y)$. W pierwszym przypadku $g(u)\neq g(x)$, gdyż g jest funkcją Grundy'ego grafu G, a więc $g(u)+h(y)\neq g(x)+h(y)$, a to oznacza, że funkcja $f(x, y) = g(x) + h(y)$ spełnia warunek G1.

W ten sam sposób warunek G1 pokazujemy w drugim przypadku.

Warunek G2 pokazujemy w oparciu o własność $4^\circ(+)$ operacji $+$. Jeśli liczba c jest mniejsza od $f(x, y) = g(x) + h(y)$, to albo $c = k + h(y)$, gdzie $k < g(x)$, albo $c = g(x) + l$, gdzie $l < h(y)$. W pierwszym przypadku istnieje $u\in\Gamma(x)$ takie, że $k=g(u)$, bo g jest funkcją Grundy'ego grafu G, a wobec tego istnieje wierzchołek $(u,y)\in\Phi(x,y)$ taki, że $f(u, y) = g(u) + h(y) = c$. Spełniony jest więc w tym przypadku warunek G2. W drugim przypadku uzasadnienie przebiega dokładnie tak samo.

To twierdzenie pozwala wyznaczać funkcje Grundy'ego dla sumy $G + H$, gdy znane są funkcje Grundy'ego grafów G i H, a tym samym w prosty sposób rozwiązywać gry alternatywne na grafach. Wystarczy bowiem w grze na grafie $G + H$ wyznaczyć pozycje przegrywające tzn. pary (x, y), dla których $g(x) + h(y) = 0$, gdzie g i h są funkcjami Grundy'ego grafów G i H. W przypadku gier na dwóch grafach jest to zadanie łatwe, bo $g(x) + h(y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(x)=h(y)$. Np. w grze rozważanej w przykładzie 6 pozycjami przegrywającymi są pary (n, m), dla których $[n]_4=[m]_6$, co zaobserwowaliśmy nie znając twierdzenia Grundy'ego. Gdybyśmy jednak rozpatrywali podobną grę, ale na trzech kupkach zapałek, to wyznaczenie zbioru przegrywających może być zadaniem trudnym nawet wtedy, gdy wykorzystamy twierdzenie Grundy'ego dla sumy trzech grafów.

Przykład 7

Na stole mamy trzy kupki zapałek i w każdym ruchu możemy wziąć określone liczby zapałek, ale tylko z jednej kupki. Z pierwszej kupki możemy wziąć od 1 do 3 zapałek, z drugiej od 1 do 4 zapałek, a z trzeciej od 1 do 5 zapałek.

Jest to gra na trzech grafach G_1, G_2 i G_3 lub na grafie $G_1 + G_2 + G_3$, gdzie $G_1=\langle N,\Gamma\rangle$, $G_2=\langle N,\Delta\rangle$, $G_3=\langle N,\Lambda\rangle$; $\Gamma(n)=\{n-k: k=1,2,3; n-k\geq 0\}$; $\Delta(m)=\{m-k: k=1,2,3,4; m-k\geq 0\}$; $\Lambda(l)=\{l-k: k=1,2,3,4,5: l-k\geq 0\}$. Funkcja Grundy'ego tej gry ma postać $f(n,m,l)=[n]_4+[m]_5+[l]_6$ a pozycje przegrywające określone są warunkiem $[n]_4+[m]_5+[l]_6$ lub np.

$$[l]_6=[n]_4+[m]_5$$

W tym przypadku charakteryzacja zbioru pozycji przegrywających i wygrywających nie jest tak prosta jak w grze na dwóch kupkach zapałek i wymaga opanowania tabliczki dodawania „ $+$ ". Łatwo zauważyć, że pozycja (17, 17, 14), dla której $[17]_4=1$, $[17]_5=2$ i $[15]_6=3$, jest przegrywająca, bo $1 + 2 + 3 = 0$ i każdy ruch z tej pozycji narusza równowagę reszt. Natomiast pozycja (17, 18, 19), dla której $[17]_4=1$, $[18]_5=3$ i $[19]_6=1$, jest wygrywająca, bo $1 + 3 + 1 = 3$ i gracz wykonujący ruch z tej pozycji weźmie 3 zapałki z drugiej kupki, zostawiając przeciwnikowi pozycję (17, 15, 19), dla której $[17]_4+[15]_5+[19]_6 = 1+0+1 = 0$.

Przykład 8

Na stole leżą trzy kupki zapałek złożone odpowiednio z n, m i l zapałek. W każdym ruchu możemy wybrać jedną kupkę i wziąć z niej dowolną nieparzystą liczbę zapałek, nie większą oczywiście od liczby zapałek w tej kupce.

Wyznaczyć pozycje przegrywające i wygrywające w tej grze.

Jest to gra na sumie trzech jednakowych grafów rozważanych w przykładzie 3. Każdy z tych grafów ma funkcję Grundy'ego postaci $g(n)=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)$ przyjmującą tylko wartości 0 albo 1. Funkcja Grundy'ego sumy tych trzech grafów ma postać $f(n,m,l)=g(n)+g(m)+g(l)$, a pozycje przegrywające wyznaczone są warunkiem $g(n)+g(m)+g(l)=0$.

Warunek ten jest spełniony wtedy, gdy liczby n, m i l są wszystkie parzyste, bo wtedy $g(n)=g(m)=g(l)=0$ i $g(n)+g(m)+g(l)=0$, albo wtedy, gdy dokładnie jedna z tych liczb jest parzysta, gdyż w tym przypadku jest sumą $+$ dwóch jedynek i zera, a taka suma $+$ daje także wynik równy 0. Można więc powiedzieć, że w tej grze przegrywające są te pozycje, w których liczba „parzystych kupek" jest nieparzysta, a wygrywające są te pozycje, w których liczba „parzystych kupek" jest parzysta.

Te proste charakteryzacje pozycji przegrywających i wygrywających wyznaczają strategię postępowania dla graczy, którzy mają wykonać ruch z pozycji wygrywających.

Czytelników zainteresowanych problematyką gier na grafach odsyłamy do dwóch poniższych książek.

C. Berge, The Theory of Graphs and Its Applications, London – New York, 1966.

C. Berge, Graphs, North-Holland, 1985.

Rościsław Rabczuk, Zbigniew Romanowicz

Z życia liczb
O pewnych własnościach i sekretach liczby 512

Każdy z nas darzy sympatią pewne liczby, ale ma i takie, które uważa za niesympatyczne, a nawet nieprzyjazne.

Matematycy twierdzą, i nie bez racji, że wszystkie liczby są wyjątkowe. Zbadajmy własności liczby 512 i ujawnijmy jej sekrety.

Przede wszystkim liczba 512 jest potęgą dwójki: $512=8^3=2^9$.

Jak każda potęga nieparzysta 2 liczba 512 jest sumą dwóch kwadratów: $512=16^2+16^2$.

Ponadto zachodzi następująca równość: $(1^1+3^1+5^1+7^1)+(1^3+3^3+5^3+7^3)=16+496=512$.

Jeżeli od $512=8^3$ odejmiemy sześcian bezpośrednio mniejszy $343=7^3$, to otrzymamy równość $8^3-7^3=13^2$, z której wynika, że trójka liczb (8, 7, 13) jest pierwszym nietrywialnym rozwiązaniem równania diofantycznego $x^3-y^3=z^2$.

Drugim rozwiązaniem tego równania będzie dopiero trójka liczb (105, 104, 181), co wynika z równości $105^3-104^3=181^2$.

Jak każda dwukrotność kwadratu liczby naturalnej 512 jest równa sumie naprzemiennej: $32\cdot31-31\cdot30+30\cdot29-29\cdot28+28\cdot27-\ldots+4\cdot3-3\cdot2+2\cdot1$.

Łatwo sprawdzić, że 512 jest sumą 171 (liczby trójkątnej, tj. liczby postaci $\frac{1}{2}n(n+1)$, $n = 1, 2,\ldots$ i palindromicznej) i 171-szej liczby całkowitej nieparzystej.

512 można otrzymać sumując 18 pierwszych liczb złożonych rzędu nieparzystego w ciągu liczb naturalnych (pierwszą liczbą złożoną jest 4, trzecią jest 8, piątą 10, itd. ... aż do 35-tej, którą jest 51).

512 jest „stałą magiczną" w kwadratowej tablicy 8×8 liczb nieparzystych przedstawionej poniżej:

1	27	109	119	69	95	41	51
29	7	113	107	89	67	53	47
115	105	31	5	55	45	9	65
111	117	3	25	43	49	71	93
35	57	79	85	103	125	11	17
63	37	83	73	123	9	23	13
81	75	61	39	21	15	121	99
77	87	33	59	9	19	101	127

Tablica ta jest kwadratem magicznym rzędu 8, w którym sumy liczb z każdego wiersza, każdej kolumny i każdej z dwóch przekątnych są równe 512.

Łatwo zauważyć, że $512=(5+1+2)^3$.

$512=8^3$ po permutacji kołowej przekształca się w liczbę 125, która jest sześcianem 5.

Suma naprzemienna cyfr liczby 512 pozostawionych w ich kolejności $5-1+2=6$ jest pierwszą liczbą doskonałą (czyli liczbą, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników właściwych). Co więcej, analogiczna suma naprzemienna kwadratów $5^2-1^2+2^2=25-1+4=28$ jest drugą liczbą doskonałą.

Przypomnijmy przy okazji, że wciąż znamy zaledwie 39 parzystych liczb doskonałych i do dziś nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb. Nie wiadomo także, czy istnieją liczby doskonałe nieparzyste.

Porównując liczbę 512 z sumą trzech pierwszych potęg, w kolejności malejącej, jej cyfr otrzymujemy $5^3+1^2+2^1=128$, czyli liczbę będącą także potęgą 2, widać też, że otrzymana w ten sposób suma jest czwartą częścią 512.

Zobaczmy jak zapisać liczbę 512 w innych niż dziesiętny układach numeracji, np. dwójkowym, czwórkowym, ósemkowym i szesnastkowym. Mamy $512_2=1000000000$ ponieważ $512=2^9$, $512_4=20000$, $512_8=1000$, $512_{16}=200$.

Na uwagę zasługują również zapisy 512 w postaci palindromu lub dwukrotności przy podstawie numeracji postaci 2^n-1. I tak, np. mamy $512_7=1331$, $512_{15}=242$, $512_{63}=88$, $512_{127}=44$, $512_{255}=22$.

Związek liczby 512 z podziałem koła ilustrują trzy poniższe przykłady.

Na tarczy zegara podzielonej na 12 godzin liczba 512 nałoży się, po 42 obrotach, na swój pierwiastek sześcienny równy 8 ($\sqrt[3]{512}=8$).

Jeżeli tarcza jest podzielona na 60 minut, to 512 przejdzie na 32, inną potęgę 2.

Na kole liczba 512 nakłada się na swój anagram, 152.

Zachęcam Czytelników, którzy chcieliby lepiej poznać piękny i interesujący świat liczb, do przewertowania poniżej wymienionych książek:

J.H. Conway, R.K. Guy, Księga liczb, WNT Warszawa, 1999.

M.E. Lines, Liczby wokół nas, Oficyna Wydawnicza PWr, 1995.

Rościsław Rabczuk

Matematyka od podstaw

Zadania z rozwiązaniami

Pierwsze zadanie, z jakim zmierzymy się tym razem, ma spore walory kształcące. Polegają one na tym, że fakty opisane w tekście zadania językiem potocznym trzeba w trakcie rozwiązywania przetłumaczyć na język algebry. Brak opanowania tej umiejętności jest powodem tak częstych narzekań na matematykę szkolną w ogóle, a na zadania tekstowe w szczególności. Nierzadko usłyszeć można wypowiedzi typu: „Matematyka byłaby znośna, gdyby nie było w niej zadań tekstowych". Jednym z celów redakcji „MMM" jest nauczenie Czytelników tej niezwykle ważnej, a sprawiającej tyle kłopotów, umiejętności.

Zadanie 1

Nieszczęście księgowej

W latach pięćdziesiątych, kiedy zamiast długopisów używano piór, dość powszechnym zjawiskiem były kleksy. Zdarzały się i poważniejsze nieszczęścia. Pewnej młodziutkiej księgowej z jednej ze spółdzielni zdarzyło się tak nieszczęśliwie rozlać atrament, że jedna ze stron księgi handlowej przybrała taki oto wygląd:

567 kg jabłek po
324 kg mąki po
144 kg cukru po
336 kg ziemniaków po

Nie można było w żaden sposób odczytać, jaka była cena kilograma jabłek, mąki, cukru czy ziemniaków. Nie można było również odczytać, ile zapłacono za wszystkie jabłka, ile za całą mąkę, ile za cukier, a ile za ziemniaki.

Zaopatrzeniowiec pamiętał jedynie, że za jabłka, mąkę, cukier i ziemniaki zapłacił łącznie 84% całej kwoty otrzymanej na zakupy. Przyparty do muru przez prezesa przypomniał sobie, że za jabłka zapłacił dokładnie trzecią część otrzymanej kwoty i jeszcze dodatkowo 30 zł i 40 gr. Na mąkę wydał trzecią część pozostałych pieniędzy i znowu dodatkowo 30 zł i 40 gr. Na cukier poszła trzecia część pieniędzy, które mu zostały i ponownie 30 zł i 40 gr, zaś na ziemniaki trzecia część pozostałych środków i znowu dodatkowo 30 zł i 40 gr.

Na podstawie tych informacji młodemu stażyście, mającemu matematyczne zdolności, udało się odtworzyć informacje z zalanej atramentem księgi handlowej, czyli obliczyć cenę kilograma każdego towaru, ile pieniędzy otrzymał zaopatrzeniowiec i ile mu zostało po zakończeniu zakupów. Jak to zrobił?

Rozwiązanie

Wszystkie kwoty występujące w zadaniu będziemy wyrażali w złotówkach np. 30 zł 40 gr zapiszemy jako 30,4 zł. Oznaczmy przez x kwotę, jaką otrzymał w kasie zaopatrzeniowiec. Fakt, że za jabłka zapłacił on dokładnie trzecią część otrzymanych pieniędzy i dodatkowo 30 zł 40 gr, zapisujemy w języku algebry jako

następujące wyrażenie: $\frac{1}{3}x+30{,}4$. Przedstawia ono kwotę, jaką zapłacił zaopatrzeniowiec za 567 kg jabłek. Jeżeli teraz od **x** (kwota otrzymana w kasie) odejmiemy wyrażenie $\frac{1}{3}x+30{,}4$ (kwota zapłacona za jabłka), otrzymamy wyrażenie $x-\left(\frac{1}{3}x+30{,}4\right)$, które przedstawia resztę, jaka pozostała zaopatrzeniowcowi po zakupie jabłek. Upraszczamy to wyrażenie otwierając najpierw nawias: $x-\frac{1}{3}x-30{,}4$ (pamiętamy, że gdy przed nawiasem jest minus, to opuszczając ów nawias przed każdym wyrazem znajdującym się wewnątrz niego zmieniamy znak na przeciwny), następnie redukujemy wyrazy podobne otrzymując wyrażenie: $\frac{2}{3}x-30{,}4$ przedstawiające ilość pieniędzy pozostałą po zakupie jabłek.

Nasz zaopatrzeniowiec kupił następnie mąkę, za którą zapłacił dokładnie trzecią część pieniędzy, jakie mu zostały i dodatkowo 30 zł i 40 gr. Mąka kosztowała zatem: $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x-30{,}4\right)+30{,}4$ złotych. Upraszczamy to wyrażenie otwierając najpierw nawias: $\frac{2}{9}x-\frac{30{,}4}{3}+30{,}4$ (pamiętamy, że gdy przy nawiasie znajduje się jakiś współczynnik, to opuszczając nawias mnożymy ten współczynnik przez każdy wyraz będący wewnątrz tego nawiasu); przekształcamy dalej, aby otrzymać możliwie jak najprostsze wyrażenie: $\frac{2}{9}x-\frac{30{,}4}{3}+\frac{91{,}2}{3}$ a stąd: $\frac{2}{9}x+\frac{60{,}8}{3}$.

Powyższe wyrażenie przedstawia koszt 324 kg mąki. Jeżeli teraz od reszty, jaka została po zapłaceniu za jabłka, odejmiemy kwotę, jaką wydano na mąkę, to otrzymamy wyrażenie: $\left(\frac{2}{3}x-30{,}4\right)-\left(\frac{2}{9}x+\frac{60{,}8}{3}\right)$, które przedstawia resztę, jaka została zaopatrzeniowcowi po zapłaceniu za mąkę. Upraszczamy to wyrażenie. Otwieramy nawiasy: $\frac{2}{3}x-30{,}4-\frac{2}{9}x-\frac{60{,}8}{3}$, dokonujemy dalszych przekształceń: $\frac{6}{9}x-\frac{91{,}2}{3}-\frac{2}{9}x-\frac{60{,}8}{3}$, i otrzymujemy wyrażenie: $\frac{4}{9}x-\frac{152}{3}$. Przedstawia ono ilość pieniędzy, jakie zostały po kupieniu mąki.

Nasz zaopatrzeniowiec kupił następnie cukier, za który zapłacił trzecią część pieniędzy, jakie mu zostały, i jeszcze 30 zł i 40 gr. Wynika z tego, że 144 kg cukru kosztowało $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}x-\frac{152}{3}\right)+30{,}4$ złotych. Upraszczamy to wyrażenie.

$$\frac{4}{27}x-\frac{152}{9}+30{,}4$$
$$\frac{4}{27}x-\frac{152}{9}+\frac{273{,}6}{9}$$
$$\frac{4}{27}x+\frac{121{,}6}{9}.$$

Ostatnie wyrażenie przedstawia koszt 144 kg cukru. Odejmując od reszty, jaka pozostała po zapłaceniu za mąkę, kwotę wydaną na cukier otrzymamy wyrażenie: $\left(\frac{4}{9}x-\frac{152}{3}\right)-\left(\frac{4}{27}x+\frac{121{,}6}{9}\right)$ przedstawiające resztę, jaka pozostała po zapłaceniu za cukier. Upraszczamy to wyrażenie:

$$\frac{4}{9}x-\frac{152}{3}-\frac{4}{27}x-\frac{121{,}6}{9}$$
$$\frac{12}{27}x-\frac{456}{9}-\frac{4}{27}x-\frac{121{,}6}{9}$$

otrzymując wyrażenie $\frac{8}{27}x-\frac{577{,}6}{9}$ przedstawiające ilość pieniędzy, jaka pozostała po zakupie cukru.

Za czwarty towar, ziemniaki, zaopatrzeniowiec zapłacił trzecią część pozostałych pieniędzy i dodatkowo 30 zł 40 gr. Zatem ziemniaki kosztowały $\frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}x-\frac{577{,}6}{9}\right)+30{,}4$ złotych. Upraszczamy to wyrażenie w trzech krokach:

$$\frac{8}{81}x-\frac{577{,}6}{27}+30{,}4,$$
$$\frac{8}{81}x-\frac{577{,}6}{27}+\frac{820{,}8}{27},$$
$$\frac{8}{81}x+\frac{243{,}2}{27}.$$

Ostatnie wyrażenie przedstawia koszt 336 kg ziemniaków.

Aby rozwiązać niniejsze zadanie, nie musiałbym już obliczać ostatniej reszty, tzn. ilości pieniędzy, jakie pozostały po zapłaceniu za ziemniaki. Nie jest to bowiem konieczne do rozwiązania zadania. Mimo tego jednak tę resztę obliczę (oczywiście również w zależności od niewiadomej **x**), gdyż chcę pokazać, że różne drogi mogą prowadzić do rozwiązania zadania tekstowego. Nieraz są to całkowicie inne drogi, tak że tylko odpowiedź jest ta sama. Częściej jednak zdarza się, że tylko niektóre fragmenty dróg różnią się między sobą, natomiast większa ich część pokrywa się. Za chwilę będziemy mieli do czynienia z takim przypadkiem.

Znajdźmy najpierw resztę, jaka pozostała zaopatrzeniowcowi po zapłaceniu za ziemniaki. W tym celu od wyrażenia $\frac{8}{27}x-\frac{577{,}6}{9}$ (czyli od reszty, jaka pozostała zaopatrzeniowcowi po kupieniu cukru) odejmujemy wyrażenie $\frac{8}{81}x+\frac{243{,}2}{27}$ (czyli kwotę, jaka została wydana na zakup ziemniaków), otrzymując w rezultacie wyrażenie $\left(\frac{8}{27}x-\frac{577{,}6}{9}\right)-\left(\frac{8}{81}x+\frac{243{,}2}{27}\right)$, które przedstawia resztę, jaka pozostała po zapłaceniu za ziemniaki. Upraszczamy to wyrażenie

$$\frac{8}{27}x-\frac{577{,}6}{9}-\frac{8}{81}x-\frac{243{,}2}{27},$$
$$\frac{24}{81}x-\frac{1732{,}8}{27}-\frac{8}{81}x-\frac{243{,}2}{27},$$
$$\frac{16}{81}x-\frac{1976}{27}.$$

Ostatnie wyrażenie przedstawia zwięźle resztę – oczywiście w zależności od niewiadomej **x** – jaka została zaopatrzeniowcowi po kupieniu ziemniaków. Reszta ta jest tą ilością pieniędzy, jaka pozostała na końcu po kupieniu wszystkich towarów.

Aby wyrazić w zależności od niewiadomej **x**, ile kosztowały łącznie jabłka, maka, cukier i ziemniaki, wystarczy od **x** (czyli od kwoty, jaką otrzymał zaopatrzeniowiec) odjąć wyrażenie $\frac{16}{81}x-\frac{1976}{27}$ (czyli resztę, jaka została mu na końcu). W wyniku tego otrzymujemy wyrażenie $x-\left(\frac{16}{81}x-\frac{1976}{27}\right)$.

Upraszczamy je: $x-\frac{16}{81}x+\frac{1976}{27}$,

$\frac{81}{81}x-\frac{16}{81}x+\frac{1976}{27}$,

$\frac{65}{81}x+\frac{1976}{27}$.

Ostatnie wyrażenie przedstawia zwięźle (w zależności od niewiadomej **x**), ile kosztowały łącznie jabłka, mąka, ziemniaki i cukier.

Wyrażenie to można otrzymać w inny sposób, bez uprzedniego znajdowania końcowej reszty (chodzi o resztę, jak pozostała po kupieniu ziemniaków). Wystarczy w tym celu dodać tylko cztery następujące wyrażenia: $\frac{1}{3}x+30{,}4$, $\frac{2}{9}x+\frac{60{,}8}{3}$, $\frac{4}{27}x+\frac{121{,}6}{9}$, $\frac{8}{81}x+\frac{243{,}2}{27}$ (znajdź te wyrażenia w dotychczasowym fragmencie rozwiązania zadania), z których pierwsze przedstawia, ile kosztowały jabłka (oczywiście w zależności od niewiadomej **x**), drugie – ile kosztowała mąka, trzecie – ile kosztował cukier, czwarte – ile kosztowały ziemniaki. Po dodaniu tych wyrażeń otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{3}x+30{,}4\right)+\left(\frac{2}{9}x+\frac{60{,}8}{3}\right)+\left(\frac{4}{27}x+\frac{121{,}6}{9}\right)+\left(\frac{8}{81}x+\frac{243{,}2}{27}\right)$$

Powyższe wyrażenie staramy się doprowadzić do możliwie najprostszej postaci:

$$\frac{1}{3}x+30{,}4+\frac{2}{9}x+\frac{60{,}8}{3}+\frac{4}{27}x+\frac{121{,}6}{9}+\frac{8}{81}x+\frac{243{,}2}{27}$$

$$\frac{27}{81}x+\frac{820{,}8}{27}+\frac{18}{81}x+\frac{547{,}2}{27}+\frac{12}{81}x+\frac{364{,}8}{27}+\frac{8}{81}x+\frac{243{,}2}{27}$$

$$\frac{65}{81}x+\frac{1976}{27}.$$

Jak widać, otrzymaliśmy identyczne wyrażenie, co poprzednio. Zauważmy, że różnice w drodze, której uwieńczeniem jest otrzymane właśnie wyrażenie, wystąpiły dopiero po znalezieniu wyrażenia przedstawiającego wartość kupionych ziemniaków. Dopiero po tym fakcie nastąpiło, mówiąc obrazowo, rozwidlenie drogi, by teraz znowu obie drogi połączyły się znowu w jedną.

Z tekstu zadania wiemy, że zaopatrzeniowiec za wszystkie towary zapłacił łącznie 84% sumy, jaką pobrał z kasy spółdzielni. Ponieważ, zgodnie z założeniem, otrzymał **x** złotych, zatem wydał $\frac{84}{100}x$ złotych. Po uproszczeniu otrzymujemy $\frac{21}{25}x$.

Dla **x** oznaczającego kwotę otrzymaną przez zaopatrzeniowca wartości obu wyrażeń $\frac{21}{25}x$ oraz $\frac{65}{81}x+\frac{1976}{27}$ są

równe sumie wydanej na wszystkie towary. Mamy więc pytanie: jaka liczba wstawiona w miejsce **x** do obu wyrażeń spowoduje, że ich wartości będą równe? Tak postawione pytanie po przetłumaczeniu na język algebry to nic innego, jak następujące równanie: $\frac{21}{25}x=\frac{65}{81}x+\frac{1976}{27}$. Aby obliczyć, ile pieniędzy otrzymał zaopatrzeniowiec na dokonanie zakupów, wystarczy rozwiązać powyższe równanie.

Przekształcamy je najpierw tak, by wszystkie wyrazy zawierające niewiadomą x znalazły się po jednej stronie znaku równości, a wyrazy wolne po drugiej stronie: $\frac{21}{25}x-\frac{65}{81}x=\frac{1976}{27}$.

Następnie sprowadzamy do wspólnego mianownika ułamki występujące po lewej stronie równania: $\frac{1701}{2025}x-\frac{1625}{2025}x=\frac{1976}{27}$, skąd po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy: $\frac{76}{2025}x=\frac{1976}{27}$. Następnie wyraz wolny dzielimy przez współczynnik znajdujący się przy niewiadomej **x**: $x=\frac{1976}{27}:\frac{76}{2025}$. Ponieważ podzielić to znaczy pomnożyć przez liczbę odwrotną, więc dzielną $\frac{1976}{27}$ mnożymy przez odwrotność dzielnika. Mamy zatem: $x=\frac{1976}{27}\cdot\frac{2025}{76}$. Skracamy (liczby znajdujące się w licznikach skracamy z liczbami w mianownikach): $x=\frac{\overset{26}{\cancel{1976}}}{\underset{1}{\cancel{27}}}\cdot\frac{\overset{75}{\cancel{2025}}}{\underset{1}{\cancel{76}}}=\frac{26\cdot 75}{1\cdot 1}=\frac{1950}{1}=1950$ (liczbę 1976 skróciliśmy z liczbą 76 dzieląc obie przez 76; podobnie postąpiliśmy z liczbami 2025 oraz 27 dzieląc je przez 27). Zatem zaopatrzeniowiec otrzymał na zakupy 1950 złotych. Obliczmy teraz, ile kosztowały jabłka, ile mąka, ile zapłacono za cukier, a ile za ziemniaki.

Skoro zaopatrzeniowiec otrzymał 1950 zł i za jabłka zapłacił trzecią część tej sumy i jeszcze dodatkowo 30 zł i 40 gr, zatem kosztowały one $1950:3+30{,}4=650+30{,}4=680{,}4$.

Po tym zakupie pozostało więc $1950-680{,}4=1269{,}6$ zł. Za mąkę zaopatrzeniowiec zapłacił trzecią część tej kwoty i dodatkowo 30 zł 40 gr, czyli $1269{,}3:3+30{,}4=423{,}2+30{,}4=453{,}6$ zł. Pozostało zatem $1269{,}6-453{,}2=816$ zł. Jedna trzecia tej kwoty i dodatkowo 30 zł 40 gr poszła na zakup cukru. Jego koszt to $816:3+30{,}4=272+30{,}4=302{,}4$. W tym momencie zaopatrzeniowiec dysponował kwotą: $816-302{,}4=513{,}6$ zł. Na koniec kupił ziemniaki płacąc za nie trzecią część posiadanych pieniędzy i dodatkowo 30 zł 40 gr. Wynika z tego, że ziemniaki kosztowały $513{,}6:3+30{,}4=171{,}2+30{,}4=201{,}6$ zł. Po dokonaniu wszystkich zakupów pozostało więc $513{,}6-201{,}6=312$ zł. Po odjęciu tej kwoty od 1950 otrzymujemy 1638. Łatwo sprawdzić, że jest to właśnie 84% z 1950 i jednocześnie wartość wszystkich zakupionych towarów, gdyż $680{,}4+453{,}6+302{,}4+201{,}6=1638$. Zatem nasze obliczenia są poprawne.

Obliczmy teraz koszt jednego kilograma jabłek, mąki, cukru i ziemniaków.
Skoro 567 kg jabłek kosztowało 680,4 zł, to cena jednego kilograma wynosiła 680,4:567=1,2 złotego. Analogicznie obliczamy koszt jednego kilograma pozostałych towarów.

Odpowiedź: Zaopatrzeniowiec otrzymał na zakupy 1950 zł, z czego zostało mu 312 zł. Kilogram jabłek kosztował 1 zł 20 gr, mąki – 1 zł 40 gr, cukru – 2 zł 10 gr, a ziemniaków – 60 gr.

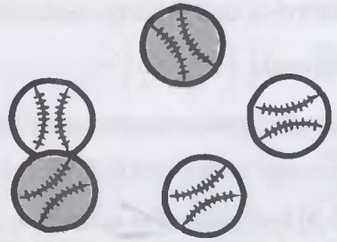
Podczas rozwiązywanie powyższego zadania, wielokrotnie musieliśmy dokonywać tłumaczenia z języka potocznego na język algebry. Tłumaczyliśmy na język algebry wartości zakupionych towarów; tłumaczyliśmy również reszty, które pozostawały po zakupie poszczególnych towarów. Na koniec wreszcie, za pomocą równania, przetłumaczyliśmy na język algebry pewne pytanie (znajdź je w tekście rozwiązania), które miało kluczowe znaczenie dla rozwiązania zadania.

Mogłoby się wydawać, że rozwiązanie zadania jest długie. To mylne wrażenie. Gdyby nie drobiazgowy komentarz, rozwiązanie zajęłoby pięciokrotnie mniej miejsca. Podczas lekcji ten komentarz nauczyciel przekazuje uczniom ustnie, nie pisząc go na tablicy. Ja natomiast mogę to zrobić tylko pisemnie. W matematyce zresztą, jak twierdzą wybitni dydaktycy, im rozwiązanie dłuższe, tym czyta się je krócej. Ten pozorny paradoks jest łatwy do wyjaśnienia. Czytając zwięzłe rozwiązanie, czytelnik musi sam dojść do wielu rzeczy (skąd na przykład z danego równania zostało otrzymane inne). W przypadku zwięzłego rozwiązania autor nie wyjaśnia swego postępowania, przerzucając na czytelnika cały trud związany z wysiłkiem intelektualnym, jaki ten musi wykonać, aby to rozwiązanie zrozumieć. To właśnie te zwięzłe rozwiązania są powodem poważnych trudności, jakie sprawiają uczącym się matematyki zadania tekstowe.

Zadanie 2

Piłeczki białe i szare

To zadanie będzie łatwe, nawet bardzo łatwe. Chodzi mi bowiem tylko o to, by na jego przykładzie zapoznać Czytelników z różnymi metodami rozwiązywania układów równań.



Pan Gawarecki jest właścicielem sklepu z artykułami sportowymi. Przedwczoraj sprzedał 3 markowe piłki tenisowe (w kolorze białym) i 2 pochodzące od miejscowego producenta (kolor szary) za łączną kwotę 36 zł. Wczoraj natomiast sprzedał tylko 4 białe piłki uzyskując za nie o 2 zł więcej niż dzisiaj za 5 sprzedanych piłek szarych. Jaka jest cena jednej piłki białej, a jaka szarej?

Rozwiązanie

I. Metoda podstawieniowa

Przez **x** oznaczamy cenę jednej białej piłeczki, a przez **y** – szarej. Z tekstu zadania wiemy, że 3 piłeczki białe i 2 szare kosztowały łącznie 36 zł. Fakt ten po przetłumaczeniu na język algebry przyjmuje postać równania z dwiema niewiadomymi: $3x+2y=36$.

Wartość 4 białych piłeczek wynosi **4x** złotych, natomiast 5 szarych piłeczek kosztuje **5y** złotych. Wiemy, że 4 białe piłeczki kosztowały o 2 zł więcej niż 5 szarych. Zatem do kwoty **5y** zł trzeba dodać 2 zł i dopiero wówczas stanie się ona równa kwocie **4x** złotych. Fakt ten zapisujemy za pomocą następującego równania z dwiema niewiadomymi: $4x=5y+2$. Otrzymane równania tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} 3x+2y=36 \\ 4x=5y+2 \end{cases}$$

Aby go rozwiązać, trzeba w jednym z równań ustalić jedną z dwóch niewiadomych, którą chcemy wyznaczyć

w zależności od drugiej. Wybierzmy np. drugie równanie i wyznaczmy niewiadomą **y** w zależności od **x**: $y=\frac{4x-2}{5}$. Otrzymane wyrażenie wstawiamy w miejsce niewiadomej **y** do pierwszego równania: $3x+2\frac{4x-2}{5}=36$. Rozwiązujemy otrzymane równanie: $\frac{5\cdot 3x}{5}+\frac{2(4x-2)}{5}=36$

$$\frac{15x}{5}+\frac{8x-4}{5}=36$$
$$\frac{14x+8x-4}{5}=36$$
$$\frac{23x-4}{5}=36$$
$$23x-4=36\cdot 5$$
$$23x-4=180$$
$$23x=184$$
$$x=184:23$$
$$x=8$$

Znamy już zatem wartość niewiadomej **x**. Wybieramy teraz jedno (dowolne) z dwóch równań naszego układu. Niech będzie nim pierwsze, czyli $3x+2y=36$. Do równania tego wstawiamy znalezioną wartość niewiadomej **x**. Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą: $3\cdot 8+2y=36$. Rozwiązujemy je:

$$24+2y=36$$
$$2y=36-24$$
$$2y=12$$
$$y=6$$

Odpowiedź: cena białej piłeczki to 8 zł, a szarej 6 zł.

II. Metoda przeciwnych lub równych współczynników

Do momentu otrzymania układu równań

$$\begin{cases} 3x+2y=36 \\ 4x=5y+2 \end{cases}$$

postępujemy tak samo, jak w przypadku poprzedniej metody.

Chcąc rozwiązać ten układ metodą przeciwnych lub równych współczynników, przekształcamy go w taki sposób, aby wyrazy zawierające niewiadome znalazły się po jednej stronie, a wyrazy wolne po drugiej. Po takim przekształceniu nasz układ przyjmie następującą postać:

$$\begin{cases} 3x+2y=36 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$$

Jak widać, pierwszego równania nie trzeba było przekształcać.

Teraz wystarczy pierwsze i drugie równanie układu pomnożyć obustronnie przez takie liczby, aby współczynniki przy niewiadomej **x** stały się równe. Ponieważ najmniejsza wspólna wielokrotność dla obecnych współczynników przy **x** – czyli dla 3 i 4 – wynosi 12, zatem pierwsze równanie układu należy

obustronnie pomnożyć przez 4, a drugie przez 3. W wyniku tego otrzymujemy następujący układ:

$$\begin{cases} 12x+8y=144 \\ 12x-15y=6 \end{cases}$$

gdzie współczynniki przy niewiadomej x są równe. Teraz trzeba oba równania odjąć stronami (albo od pierwszego odjąć drugie, albo od drugiego odjąć pierwsze). W wyniku tego otrzymujemy:

$$(12x+8y)-(12x-15y)=144-6.$$

Po otwarciu nawiasów dostajemy: $12x+8y-12x+15y=144-6$.

Następnie dokonujemy redukcji wyrazów podobnych: $23y=138$, skąd $y=138:23$

$$y=6.$$

Teraz wybieramy jedno z dwóch równań początkowego układu, na przykład pierwsze, czyli $3x+2y=36$. Do równania tego w miejsce niewiadomej y wstawiamy liczbę 6. W wyniku tego otrzymujemy następujące równanie z jedną niewiadomą: $3x+2\cdot6=36$

Rozwiązujemy je:

$$3x+12=36,$$
$$3x=36-12,$$
$$3x=24,$$
$$x=24:3,$$
$$x=8.$$

Znaleźliśmy zatem wartości obu niewiadomych x oraz y: $x = 8, y = 6$.

Dalszy ciąg rozwiązania zadania byłby taki sam, jak w przypadku zastosowania pierwszej metody.

Można było również postąpić inaczej. W momencie otrzymania układu

$$\begin{cases} 3x+2y=36 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$$

zamiast starać się o to, aby w obu równaniach współczynniki przy niewiadomej x były równe, można było doprowadzić do tego, żeby współczynniki przy niewiadomej y były przeciwne (stąd nazwa metody: równych lub przeciwnych współczynników). Ponieważ najmniejsza wspólna wielokrotność dla 2 i 5 równa się 10, więc aby w obu równaniach współczynniki przy niewiadomej y wynosiły odpowiednio 10 i -10, wystarczy pierwsze równanie układu pomnożyć obustronnie przez 5, a drugie równanie przez 2. W rezultacie otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} 15x+10y=180 \\ 8x-10y=4 \end{cases}$$

gdzie współczynniki przy niewiadomej y są przeciwne. Skoro współczynniki przy niewiadomej y są przeciwne, to nie możemy postąpić tak, jak w poprzednim przypadku, to znaczy odjąć równania stronami, gdyż wówczas wyrazy zawierające niewiadomą y nie zredukują się (zachęcam Czytelników do sprawdzenia tego). Co należy więc zrobić? Dodać oba równania stronami. W rezultacie otrzymamy:

$$(15x+10y)+(8x-10y)=180+4.$$

Po otwarciu nawiasów otrzymujemy: $15x+10y+8x-10y=180+4$.

Następnie przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych, w wyniku czego mamy: $23x=184$, skąd

$$x=184:23$$
$$x=8.$$

Teraz wybieramy jedno z dwóch równań początkowego układu, na przykład drugie, czyli $4x=5y+2$. Do równania tego w miejsce niewiadomej x wstawiamy liczbę 8. W wyniku tego otrzymujemy następujące równanie z jedną niewiadomą:

$$4\cdot8=5y+2.$$

Rozwiązujemy je:

$$32=5y+2$$
$$32-2=5y$$
$$30=5y$$
$$y=30:5$$
$$y=6$$

Jak widać, znalezione wartości obu niewiadomych x oraz y są takie same jak poprzednio. Zatem nasz układ równań został rozwiązany prawidłowo.

III. Metoda porównywania równań stronami

Do chwili otrzymania układu równań

$$\begin{cases} 3x+2y=36 \\ 4x=5y+2 \end{cases}$$

postępujemy tak samo, jak w przypadku stosowania dwóch poprzednich metod. Dopiero od momentu ułożenia powyższego układu nasze postępowanie zmienia się. Wybieramy sobie jedną z dwóch niewiadomych występujących w tym układzie. Niech będzie to na przykład niewiadoma y. Tę niewiadomą wyznaczamy z obu równań układu, otrzymując w ten sposób nowy układ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{36-3x}{2} \\ y=\dfrac{4x-2}{5} \end{cases}$$

Skoro lewe strony równań są równe, to i prawe również muszą być równe. Fakt ten zapisujemy w postaci następującego równania z jedną niewiadomą:

$$\frac{36-3x}{2}=\frac{4x-2}{5}$$

Łatwiej jest rozwiązać równanie, gdy występują w nim tylko liczby całkowite, a nie ułamki. Chcąc znieść mianowniki, obie strony ostatniego równania mnożymy przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników, czyli przez 10. Po wykonaniu tej operacji otrzymujemy równanie

$$\frac{10(36-3x)}{2}=\frac{10(4x-2)}{5}$$

Skracamy

$$\frac{\overset{5}{\cancel{10}}(36-3x)}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{\overset{2}{\cancel{10}}(4x-2)}{\underset{1}{\cancel{5}}},$$

skąd

$$5(36-3x)=2(4x-2).$$

Następnie otwieramy nawiasy

$$180-15x=8x-4,$$

a w wyniku dalszych przekształceń otrzymujemy:

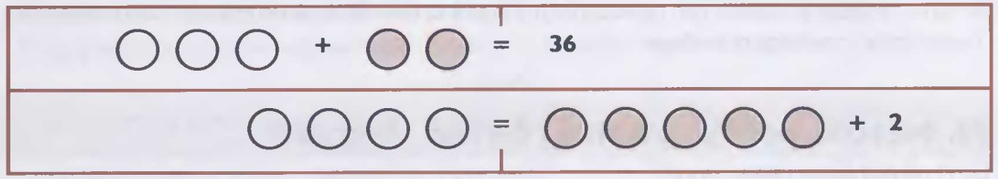
$$180+4=8x+15x,$$
$$184=23x,$$
$$x=8.$$

Dalszy ciąg rozwiązywania jest taki sam, jak w przypadku poprzednich dwóch metod. To znaczy, wybieramy jedno z dwóch równań tworzących początkowy układ i w miejsce niewiadomej x wstawiamy liczbę 8. W ten sposób powstaje równanie z jedną niewiadomą y, które z łatwością rozwiązujemy, znajdując, że $y=6$.

IV. Metoda bez równań

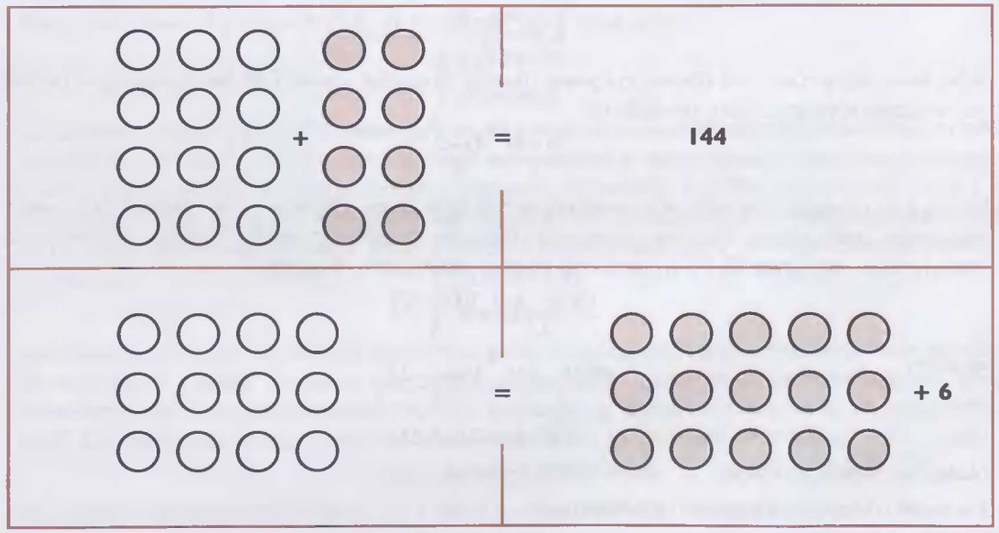
Do powyższych wyników można dojść nie rozwiązując żadnych równań! W pomysłowy i oryginalny sposób dokonał tego pewien trzecioklasista.

Fakt, że 3 piłeczki białe i 2 szare kosztowały łącznie 36 zł oraz, że wartość 4 białych piłek była równa łącznej wartości 5 piłeczek szarych i 2 zł, ów dziewięciolatek przedstawił w postaci poniższego rysunku:



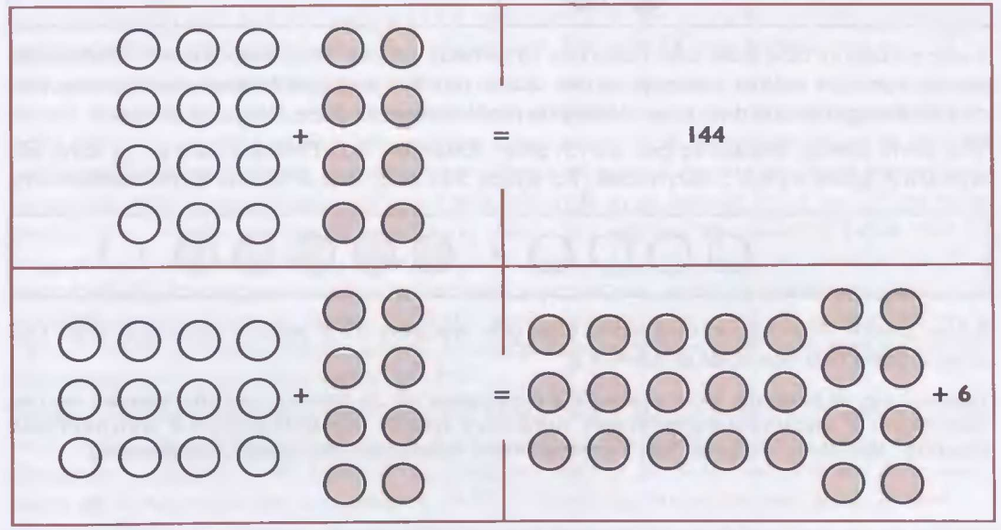
Jeżeli przyjrzymy się uważnie temu rysunkowi zauważymy, że jest on pomysłowym zapisem początkowego układu równań. Autor tego rozwiązania dąży następnie do tego, by w lewostronnych okienkach, górnym i dolnym, pojawiła się taka sama ilość piłeczek białych i aby jednocześnie białe piłeczki nie pojawiły się w którymkolwiek okienku prawostronnym. Pomysł ten realizuje zwielokrotniając stopniowo zarówno ilość piłeczek, jak i wielkość kwot w poszczególnych okienkach.

Okazuje się, że zwiększając czterokrotnie zawartość obu górnych okienek i potrajając zawartość obu dolnych, otrzymamy w obu przypadkach tę samą ilość białych piłeczek – to znaczy 12. Sytuację tę obrazuje poniższy rysunek:

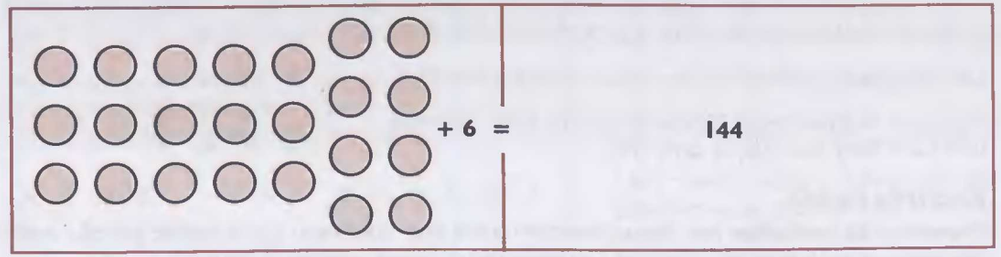


Jak widać, pomysłowemu trzecioklasiście udało się doprowadzić do tego, że w obu okienkach z lewej strony – górnym i dolnym – pojawiła się taka sama ilość piłeczek białych i jednocześnie piłeczki białe nie pojawiły się w żadnym z okienek po prawej stronie. Następnie nasz dziewięciolatek doprowadził do tego, iż nie tylko w każdym z obu lewych okienek znalazła się taka sama liczba piłeczek białych (po 12 w każdym), lecz również w okienkach tych pojawiła się identyczna liczba piłeczek szarych. Przeprowadzony w tym celu zabieg nie spowodował przy tym pojawienia się białych piłeczek w żadnym z okienek

prawych. Polegał on bowiem tylko na dodaniu do 12 białych piłeczek z lewego dolnego okienka 8 piłeczek szarych. Dlaczego akurat 8? Chodziło po prostu o to, by w obu lewych okienkach znalazła się taka sama liczba piłeczek białych i szarych. Żeby jednak po dodaniu 8 szarych piłeczek do lewego dolnego okienka łączna wartość wszystkich piłeczek z tego okienka była równa łącznej wartości wszystkiego tego, co jest w prawym dolnym okienku, trzeba również zawartość prawego dolnego okienka powiększyć o 8 szarych piłeczek. Mamy zatem w lewym dolnym okienku 12 piłeczek białych i 8 szarych, natomiast w prawym dolnym okienku – kwotę wynoszącą 6 zł i 23 szare piłeczki. Zatem łączna wartość 12 piłeczek białych i 8 szarych jest równa łącznej wartości 23 piłeczek szarych i dodatkowo 6 złotych. Sytuację tę przedstawia poniższy rysunek.

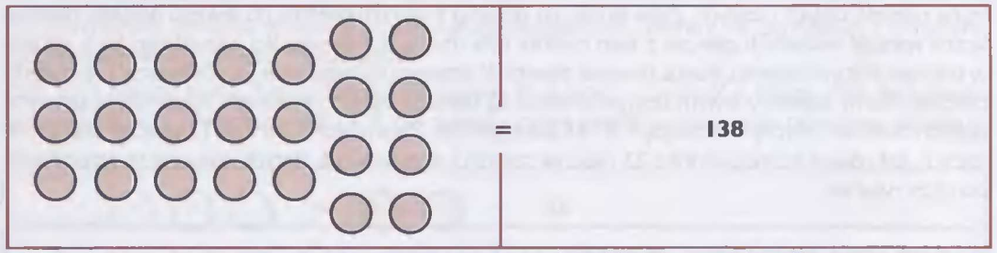


Z wcześniejszych rozważań wiemy, że łączna wartość piłek znajdujących się w lewym górnym okienku równa jest kwocie widocznej w prawym górnym okienku, natomiast wartość wszystkich piłek z lewego dolnego okienka równa jest łącznej wartości piłek oraz kwoty z prawego dolnego okienka. Ponieważ, jak łatwo policzyć na rysunku, w każdym z obu lewych okienek jest taka sama liczba piłeczek białych i szarych (12 i 8), więc łączna wartość wszystkich piłeczek z lewego górnego okienka równa jest łącznej wartości piłeczek z lewego dolnego okienka. Ogólny wniosek jest taki, że wartość tego, w każdym z czterech okienek jest identyczna. Zatem łączna wartość 23 szarych piłek i 6 zł jest równa kwocie 144 zł. Sytuację tę obrazuje kolejny rysunek.



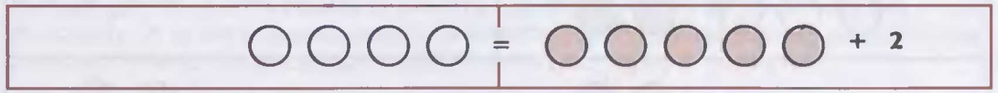
Aby kwota 6 zł znikła z lewej strony rysunku, zabieramy ją stamtąd, pamiętając jednocześnie o pomniejszeniu o 6 zł kwoty z prawej strony rysunku.

Zatem 23 szare piłeczki kosztują 138 złotych. Aby obliczyć cenę jednej takiej piłki, wystarczy 138 zł podzielić przez ilość piłek, czyli przez 23. Zatem jedna szara piłka kosztuje 6 zł.



Teraz znajdziemy cenę białej piłki. Popatrzmy na pierwszy rysunek, który bezpośrednio odzwierciedla sytuację opisaną w zadaniu. Interesują nas dwa okienka poziome połączone znakiem równości; więc albo dwa okienka górne, albo dwa dolne. Weźmy dla przykładu okienka dolne. Wyglądają one tak:

W prawym okienku znajduje się pięć szarych piłek i dodatkowo 2 zł. Ponieważ cena jednej szarej piłki wynosi 6 zł, łączna wartość 5 szarych piłek i 2 zł wynosi $5 \cdot 6+2=32$ złote. Z kolei w lewym okienku mamy



4 białe piłeczki. Aby obliczyć cenę jednej białej piłki, wystarczy 32 zł podzielić przez ilość piłek, czyli przez 4. Jedna biała piłka kosztuje zatem 8 zł.

Okazuje się, że zadanie, które normalnie rozwiązuje się za pomocą układu równań, można rozwiązać w niezwykle elementarny, obrazowy sposób, bez korzystania z jakichkolwiek równań. Metoda ta dostępna jest nawet uczniom młodszych klas szkoły podstawowej.

Zadanie 3

Kryptogram

Ten rodzaj zadań nie ma zbyt długiej historii. Po raz pierwszy zadanie tego typu ukazało się w 1924 roku. Wymyślił je Ernest Dudeney. Zadania te zaliczane są do tak zwanych łamigłówek matematycznych. Od łamigłówek logicznych różnią się tym, że w trakcie ich rozwiązywania trzeba wykazać się nie tylko umiejętnością logicznego myślenia, lecz również znajomością pewnych prostych algorytmów matematycznych.

Oto dodawanie, w którym każda cyfra oznaczona została literą.

Przy czym różnym literom odpowiadają różne cyfry, natomiast takie same litery oznaczają tę samą cyfrę.

$$\begin{array}{cccc} M & A & M & A \\ + & A & M & R \\ \hline A & R & K & A \end{array}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że niemożliwe jest, aby w powyższej sumie przy dodawaniu cyfr w rzędzie jedności został przekroczony próg dziesiątki. Wówczas bowiem miałaby miejsce następująca równość:

$$A+R=10+A$$

Rozwiązując ją otrzymalibyśmy, iż $R=10$. Wynik ten byłby sprzeczny z założeniem, że każda litera oznacza liczbę jednocyfrową. Skoro przy dodawaniu cyfr w rzędzie jedności nie został przekroczony próg dziesiątki, zachodzi zatem następująca równość: $A+R=A$

Rozwiązując ją otrzymujemy wynik $R=0$.

W ten sposób dowiedzieliśmy się, że litera R oznacza cyfrę 0. Litera ta występuje również w rzędzie setek liczby ARKA. Co z tego wynika? Suma cyfr w rzędzie setek liczb MAMA oraz AMR wynosi $1+2A$ lub $2A$ w zależności od tego, czy w trakcie dodawania cyfr z rzędu o jeden niższego, czyli z rzędu dziesiątek, został przekroczony próg dziesiątki, czy też nie. W pierwszym przypadku, gdy próg dziesiątki został wcześniej przekroczony, 1 zostaje dołączone do rzędu setek liczb MAMA oraz AMR i wówczas suma cyfr z rzędu setek tych liczb wynosi $1+2A$; natomiast w drugim przypadku, gdy próg dziesiątki nie został wcześniej przekroczony, suma cyfr w rzędzie setek liczb MAMA oraz AMR wynosi tylko $2A$.

W rzędzie setek liczby ARKA jest litera R, co oznacza, że w miejscu tym znajduje się cyfra 0. Z tego wynika, że suma cyfr w rzędzie setek liczb MAMA oraz AMR wynosi 0 albo 10. Wiemy, że A oznacza liczbę jednocyfrową różną od zera, gdyż zero jest oznaczone przez R. Biorąc pod uwagę, że zero jest najmniejszą liczbą jednocyfrową, dochodzimy do wniosku, że skoro A oznacza inną liczbę jednocyfrową niż zero, to musi oznaczać liczbę większą od zera. Jeśli $A>0$, to ani wartość $1+2A$, ani $2A$ nie może wynosić zero; musi być większa od zera. Wiemy zatem, że z jednej strony wyrażenia $1+2A$ oraz $2A$ mogą przyjmować tylko wartości większe od zera, z drugiej zaś strony mogą przyjmować jedynie dwie wartości: 0 i 10. Po połączeniu obu faktów dochodzimy do wniosku, że interesujące nas wyrażenia mogą przyjmować tylko wartość 10. Gdyby $1+2A=10$, to po rozwiązaniu tego równania otrzymalibyśmy, że $A=4{,}5$. Wynik ten jest sprzeczny z tym, że A oznacza liczbę jednocyfrową. W takim razie to $2A=10$. Rozwiązując to równanie otrzymujemy, że $A=5$.

Ponieważ po dodaniu cyfr znajdujących się w liczbach MAMA oraz AMR w rzędzie setek został przekroczony próg dziesiątki, zatem 1 trzeba dodać do cyfry znajdującej się w liczbie MAMA w rzędzie tysięcy, czyli do M. Otrzymujemy wyrażenie $1+M$. Patrząc na nasz kryptogram widzimy, że $1+M$ musi się równać A. Ponieważ wiemy już, że A oznacza cyfrę 5, otrzymujemy $1+M=5$. Rozwiązując to równanie znajdujemy, że $M=4$.

W wyniku dotychczasowych rozważań ustaliliśmy, że pod literami R, A oraz M ukrywają się odpowiednio cyfry: 0, 5 oraz 4. Poznaliśmy w ten sposób wszystkie cyfry, z jakich utworzone są oba składniki występujące w kryptogramie. Możemy więc już napisać, jak wygląda całe dodawanie:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 4 & 5 \\ + & 5 & 4 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 8 & 5 \end{array}$$

Przy okazji dowiedzieliśmy się, że litera K oznacza cyfrę 8.

Zadanie 4

Algebraf

Algebrafy, podobnie jak kryptogramy, zaliczane są do łamigłówek matematycznych, a ich rozwiązywanie jest równie popularne.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} A & B & A & C & - & & D & D & B & = & A & D & E & B \\ & & & : & & & & & \times & & & & + \\ & & F & A & + & & & E & B & = & & D & D & G \\ \hline & B & D & A & + & A & G & H & C & = & A & B & A & B \end{array}$$

Litery należy zastąpić cyframi tak, by powstałe w ten sposób liczby tworzyły poprawne działania. Takim samym literom odpowiadają identyczne cyfry, a różnym literom różne cyfry.

Rozwiązanie

Aby móc łatwiej opisać rozumowanie prowadzące do rozwiązania, oznaczamy sześć działań wchodzących w skład algebrafu za pomocą symboli (a), (b), (c), (d), (e), (f). Symbole (a), (b) i (c) oznaczają działania w kolumnach (w pionie), symbole (d), (e), (f) działania w rzędach. Poniższy rysunek obrazuje dokładnie, który z symboli oznacza jakie działanie.

(a)					(b)					(c)				
A	B	A	C	$-$	D	D	B	$=$	A	D	E	B	(d)
		:					×					+	
		F	A	$+$			E	B	$=$		D	D	G	(e)
B	D	A	$+$	A	G	H	C	$=$	A	B	A	B	(f)	

Wykonując różne działania często nie zastanawiamy się nad nimi. Niniejszy algebraf zmusi nas do kilku refleksji w tym zakresie. Dwie następne uwagi są natury ogólnej, ale będą bardzo pomocne w trakcie rozwiązywania naszego algebrafu.

Zauważmy, że ostatnia cyfra liczby będącej iloczynem dwóch liczb naturalnych równa jest ostatniej cyfrze liczby będącej z kolei iloczynem ostatnich cyfr tych dwóch liczb naturalnych. Podobny fakt ma miejsce w przypadku dodawania dwóch liczb naturalnych. Ostatnia cyfra liczby będącej sumą dwóch liczb naturalnych równa jest ostatniej cyfrze liczby będącej z kolei sumą ostatnich cyfr tych dwóch liczb naturalnych.

Weźmy dwie dowolne liczby naturalne, na przykład 237 i 84. Po pomnożeniu tych liczb otrzymujemy liczbę 19908. Ostatnią jej cyfrą jest 8. Teraz pomnóżmy ostatnie cyfry wybranych na początku liczb, czyli pomnóżmy 7 przez 4. Otrzymujemy liczbę 28, której ostatnią cyfrą jest znowu 8.

Teraz dodajmy liczby 237 i 84. Otrzymujemy w wyniku 321. Ostatnią cyfrą jest 1. Dodajemy ostatnie cyfry wybranych liczb, czyli 7 oraz 4. Otrzymujemy liczbę 11, której ostatnią cyfrą jest znowu 1.

Oba te spostrzeżenia zastosujemy do rozwiązania naszego algebrafu. Weźmy działanie (b):

$$DDB \cdot EB = AGHC$$

oraz (d):

$$ABAC - DDB = ADEB$$

Działanie (d) zapiszmy w postaci następującej sumy:

$$ADEB + DDB = ABAC$$

Mamy zatem dwa działania:

$$DDB \cdot EB = AGHC \text{ oraz } ADEB + DDB = ABAC$$

Na podstawie naszego pierwszego spostrzeżenia wiemy, że ostatnia cyfra iloczynu $DDB \cdot EB$ jest taka sama, jak ostatnia cyfra iloczynu $B \cdot B$. Ponieważ ostatnią cyfrą iloczynu $DDB \cdot EB$ jest cyfra C, zatem ostatnią cyfrą iloczynu $B \cdot B$ jest również cyfra C. Zgodnie z drugim spostrzeżeniem ostatnia cyfra sumy $ADEB + DDB$ jest taka sama, jak ostatnia cyfra sumy $B + B$. Skoro ostatnią cyfrą sumy $ADEB + DDB$ jest C, więc ostatnią cyfrą sumy $B + B$ musi być także C. Z tego wniosek, że litera B oznacza taką cyfrę, że iloczyn $B \cdot B$ oraz suma $B + B$ są liczbami kończącymi się taką samą cyfrą. Sprawdzamy, która z dziesięciu cyfr ma taką własność:

$0 \;\; 0 = 0, \quad 1 \;\; 1 = 1, \quad 2 \;\; 2 = 4, \quad 3 \;\; 3 = 9, \quad 4 \;\; 4 = 16,$
$0 + 0 = 0, \quad 1 + 1 = 1, \quad 2 + 2 = 4, \quad 3 + 3 = 6, \quad 4 + 4 = 8,$

$5 \;\; 5 = 25, \quad 6 \;\; 6 = 36, \quad 7 \;\; 7 = 49, \quad 8 \;\; 8 = 64, \quad 9 \;\; 9 = 81,$
$5 + 5 = 10, \quad 6 + 6 = 12, \quad 7 + 7 = 14, \quad 8 + 8 = 16, \quad 9 + 9 = 18.$

Okazało się, że są dwie cyfry o takiej własności: 0 i 2. Litera B nie może jednak oznaczać cyfry 0, gdyż znajdując się na końcu liczb DDB oraz EB musiałaby być również na końcu liczby $AGHC$ będącej

iloczynem tych liczb. A tak przecież nie jest. Zatem $B=2$ i w konsekwencji $C=4$.

Zajmijmy się teraz działaniem (a) $ABAC : FA = BDA$.

Zapiszmy je najpierw w postaci następującego iloczynu: $BDA \cdot FA = ABAC$.

Zgodnie z pierwszym spostrzeżeniem ostatnia cyfra iloczynu $BDA \cdot FA$ jest taka sama jak ostatnia cyfra iloczynu $A \cdot A$. Ponieważ ostatnią cyfrą iloczynu $BDA \cdot FA$ jest cyfra oznaczona przez C, czyli 4, zatem ostatnią cyfrą iloczynu $A \cdot A$ musi być również 4. Szukamy więc takiej cyfry, która pomnożona przez samą siebie daje w wyniku liczbę mającą na końcu cyfrę 4. Nie bierzemy już oczywiście pod uwagę ani cyfry 2, ani 4, gdyż wiemy, że te dwie cyfry są oznaczone przez inne litery niż A. Nie musimy więc sprawdzać wszystkich dziesięciu cyfr, wystarczy sprawdzić osiem (tj. 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8 i 9). Okazuje się, że poszukiwaną cyfrą jest 8 (bo $8 \cdot 8 = 64$), czyli że $A=8$.

Teraz zajmiemy się działaniem (c).

	A	D	E	B
$+$		D	D	G
	A	B	A	B

Litery A, B i C zastępujemy odpowiednio cyframi 8, 2 i 4. W wyniku tego otrzymujemy:

	8	D	E	2
$+$		D	D	G
	8	2	8	2

Widać od razu, że $G=0$.

Po dodaniu cyfr znajdujących się w rzędzie setek otrzymujemy albo liczbę $1+2 \cdot D$, albo liczbę $2 \cdot D$. Liczbę $1+2 \cdot D$ dostajemy wtedy, gdy w trakcie sumowania cyfr znajdujących się w rzędzie dziesiątek został przekroczony próg dziesiątki; w przeciwnym wypadku otrzymujemy liczbę $2 \cdot D$. Z drugiej strony widać, że w rzędzie setek liczby 8282 znajduje się cyfra 2. Z tego wniosek, że liczbą powstałą w wyniku dodania cyfr z rzędu setek może być tylko 12 lub 2. W przypadku sumowania dwóch składników innych możliwości nie ma. Wystarczy jednak chwila zastanowienia, aby również 12 odrzucić jako liczbę, która mogła powstać w wyniku dodania cyfr z rzędu setek liczb $8DE2$ oraz DDG. Wtedy bowiem trzeba byłoby dodać 1 do cyfry tysięcy liczby $8DE2$, czyli do 8, i wówczas pierwszą cyfrą liczby 8282 byłaby dziewiątka, a nie ósemka. Z dotychczasowych rozważań wynika, że suma cyfr z rzędu setek liczb $8DE2$ oraz DDG wynosi 2. Innych możliwości nie ma. Zatem

$$1+2 \cdot D = 2 \text{ lub } 2 \cdot D = 2.$$

Rozwiązując pierwsze z powyższych równań otrzymujemy, że $D=\frac{1}{2}$; natomiast rozwiązując drugie równanie otrzymujemy $D=1$. Ponieważ D oznacza liczbę jednocyfrową, zatem przypadek, w którym $D=\frac{1}{2}$ wykluczamy. Pozostaje jedna możliwość: $D=1$. Natychmiastową konsekwencją tego, że $D=1$, jest ustalenie, że $E=7$.

Ponieważ $D=1$, $B=2$ a $E=7$, zatem wiemy, że liczba DDB wynosi 112, a liczba EB równa się 72. Obliczając iloczyn $112 \cdot 72$ dowiadujemy się, że liczba $AGHC$ wynosi 8064, czyli że litera H oznacza cyfrę 6.

Podobnie odkrywamy, jaką cyfrę oznacza litera F. Skoro $A=8$, $B=2$, $C=4$ i $D=1$, wiemy więc, że liczby $ABAC$ oraz BDA wynoszą odpowiednio 8284 i 218. Działanie $ABAC : FA = BDA$ możemy zatem zapisać w następujący sposób: $8284 : FA = 218$.

Teraz, aby znaleźć liczbę FA, wystarczy podzielić 8284 przez 218. Po wykonaniu tego dzielenia dowiadujemy się, że liczba FA wynosi 38, czyli że litera F oznacza cyfrę 3.

W ten sposób dowiedzieliśmy się, jaką cyfrę oznacza każda z ośmiu liter występujących w algebrafie. Zastępując litery znalezionymi cyframi otrzymujemy:

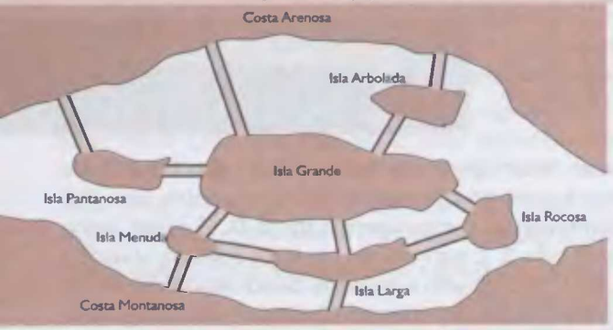
8	2	8	4	–		1	1	2	=	8	1	7	2
			:					×				+	
		3	8	+			7	2	=		1	1	0
2	1	8	+	8	0	6	4	=	8	2	8	2	

Na koniec należy jeszcze sprawdzić, czy powstałe w ten sposób liczby tworzą poprawne działania.

Zadanie 5

Santa Cristina

Na rysunku widoczny jest fragment planu południowoamerykańskiego miasteczka Santa Cristina, położonego na obu brzegach rzeki Salado i sześciu znajdujących się na tej rzece wyspach.



Na planie zaznaczono wszystkie mosty znajdujące się w mieście – razem dwanaście.

Osiemnastoletni Juan Rodriguez i siedemnastoletnia Carlota Lopez są mieszkańcami miasteczka. Co ich łączy? Miłość i wspólne spacery. Juan jest tak bardzo zakochany w Carlocie, że codziennie odprowadza ją ze szkoły do domu znajdującego się na jednej z sześciu wysp. Chcąc być z ukochaną jak najdłużej, nie odprowadza jej do domu najkrótszą drogą, lecz prowadzi ją przez wszystkie dwanaście mostów (jak twierdzi, osoby, które nie lubią spacerów przez mosty, nie są romantyczne). Carlota zgadza się na codzienny spacer przez wszystkie mosty w mieście. Żeby jednak spacer zbytnio nie przedłużał się – wszak pilna uczennica musi odrobić lekcje – stawia warunek: przejdziemy przez każdy z dwunastu mostów co najwyżej jeden raz. I w ten sposób zakochana para każdego dnia przechodzi przez każdy z dwunastu mostów dokładnie jeden raz.

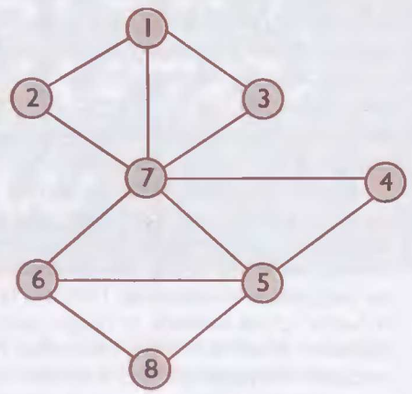
Na której wyspie mieszka Carlota i gdzie znajduje się jej szkoła?

Rozwiązanie

Na pewno wielu Czytelników pomyśli – zadanie jest nie do rozwiązania, za mało danych. Możliwości matematyki są jednak ogromne i istnieją metody pozwalające rozwiązywać tego typu zagadnienia. Nasze zadanie rozwiążemy na gruncie teorii grafów. Musimy przedtem jednak przetłumaczyć jego treść na język charakterystyczny dla tej teorii. Posłuży nam do tego następująca tabelka:

Nazwa	*Oznaczenie*	*Nazwa*	*Oznaczenie*
Costa Arenosa	*1*	*Isla Larga*	*5*
Isla Pantanosa	*2*	*Isla Menuda*	*6*
Isla Arbolada	*3*	*Isla Grande*	*7*
Isla Rocosa	*4*	*Costa Montanosa*	*8*

Po przetłumaczeniu tekstu zadania na język teorii grafów, tekst ów przyjmuje postać następującego rysunku nazywanego w matematyce grafem:



Kółka z wpisanymi liczbami nazywamy wierzchołkami grafu (odpowiadają one sześciu wyspom i obu nabrzeżom), natomiast linie łączące poszczególne wierzchołki nazywamy krawędziami grafu (w naszym przypadku odpowiadają one dwunastu mostom). Mapkę na odpowiedni graf zamienia się łatwo. Na przykład na mapce z zadania widzimy, że Isla Larga, której odpowiada wierzchołek 5, połączona jest mostem z Costa Montanosa, której z kolei odpowiada wierzchołek 8. Fakt ten znajduje odzwierciedlenie na grafie poprzez połączenie krawędzią wierzchołków 5 i 8. Podobnie zaznaczamy na grafie inne mosty widoczne na planie miasteczka. Nie jest to trudne, trzeba tylko uważać, by nie opuścić jakiejś krawędzi lub nie połączyć błędnie wierzchołków. Graf ma tę przewagę nad planem, że nie zawiera niepotrzebnych szczegółów, które mogłyby rozpraszać uwagę rozwiązującego.

Mając sporządzony graf możemy przystąpić do rozumowania, dzięki któremu dowiemy się, gdzie mieszka Carlota i gdzie znajduje się jej szkoła.

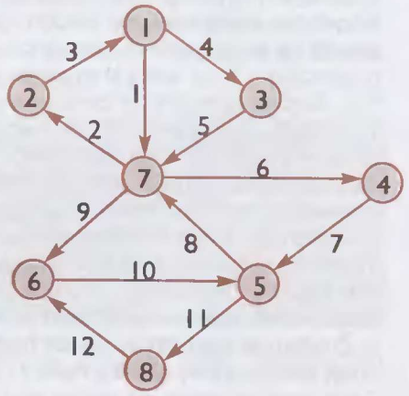
Wyobraźmy sobie, że mamy w ręku długopis z czerwonym wkładem i chcemy narysować nim, nie odrywając rysika od kartki, linię przechodzącą przez każdą krawędź na grafie dokładnie jeden raz. Rysowanie rozpoczynamy oczywiście w jednym z ośmiu wierzchołków. Zastanówmy się, czy możemy rozpocząć od wierzchołka 4. Wierzchołek ten jest końcem dwóch krawędzi. Rozpoczynając rysowanie czerwonej linii od wierzchołka 4 przechodzimy najpierw przez jedną z dwóch krawędzi, których końcem jest ten wierzchołek. Następnie przesuwamy długopis wzdłuż innych krawędzi i w pewnym momencie – jeśli na czerwono mają być obrysowane wszystkie krawędzie grafu – wiedziemy długopis po drugiej krawędzi, której jednym z końców jest wierzchołek 4 dochodząc do niego. Po dotarciu do wierzchołka 4 nie możemy już się z niego wydostać bez odrywania długopisu od kartki lub bez ponownego przesuwania go po krawędzi już obrysowanej, co, według warunków zadania, jest niedopuszczalne.

Jeżeli w tym momencie pozostały w grafie jakieś krawędzie, przez które nie przeprowadziliśmy długopisu, nie możemy już tego zrobić, co oznacza, że nie udało się nam rozwiązać zadania. Jeżeli natomiast przed dotarciem do wierzchołka 4 przeprowadziliśmy długopis przez wszystkie pozostałe krawędzie, to znaczy, że udało się narysować drogę przechodzącą przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Oznacza to, że jeżeli możliwe jest narysowanie drogi zaczynającej się w wierzchołku 4 i przechodzącej przez każdą krawędź, to droga ta musi kończyć się również w tym samym wierzchołku. Zauważmy w tym momencie, że w naszym grafie są wierzchołki, które są końcami nieparzystej liczby krawędzi (chodzi o wierzchołki 1 i 6). Dla ustalenia uwagi wybierzmy sobie jeden z tych wierzchołków, na przykład 1. Rysując czerwonym tuszem naszą drogę wychodzącą z wierzchołka 4 i prowadzącą przez każdą krawędź dokładnie jeden raz, musielibyśmy w pewnym momencie po raz pierwszy dotrzeć do wierzchołka 1 jedną z trzech krawędzi, których ten wierzchołek jest końcem. Następnie opuścilibyśmy go drugą krawędzią. Pozostałaby w ten sposób nie zamalowana na czerwono tylko jedna krawędź wychodząca z wierzchołka 1. Rysując drogę przechodzącą przez każdą krawędź na grafie dokładnie jeden raz, musielibyśmy w końcu poprowadzić nasz długopis tą jeszcze nie zamalowaną na czerwono, trzecią krawędzią, dochodząc w ten sposób do wierzchołka 1. Okazuje się, że wszystkie trzy krawędzie, wychodzące z wierzchołka 1, zostały zamalowane na czerwono i aby opuścić teraz ów wierzchołek musielibyśmy albo drugi raz poprowadzić długopis wzdłuż zamalowanej już wcześniej krawędzi, albo oderwać go od kartki. Oba sposoby są oczywiście niedopuszczalne. Wychodząc z założenia, że można narysować drogę, zaczynającą się w wierzchołku 4 i przechodzącą wzdłuż każdej krawędzi dokładnie jeden raz, doszliśmy do sprzeczności. Wykazaliśmy bowiem z jednej strony, że droga taka musiałaby kończyć się również w wierzchołku 4, zaś z drugiej strony pokazaliśmy, że próba zakończyłaby się w wierzchołku 1, jeśli oczywiście nie zakończyłaby się wcześniej w innym wierzchołku, który jest końcem nieparzystej liczby krawędzi, czyli w wierzchołku 6. Źródłem tej sprzeczności nie jest błąd w rozumowaniu, lecz fałszywe założenie, że można narysować drogę zaczynającą się w wierzchołku 4 i przechodzącą przez każdą krawędź na grafie dokładnie jeden raz. Takiej drogi narysować nie można, gdyż po prostu taka droga nie istnieje.

Przeprowadzenie identycznego rozumowania wyklucza istnienie dróg zaczynających się w innych wierzchołkach grafu, będących końcami parzystych liczb krawędzi, które to drogi przechodziłyby przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Pozostały więc do rozważenia tylko dwa wierzchołki, które są końcami nieparzystych liczb krawędzi. W naszym przypadku chodzi o wierzchołki 1 i 6.

Rozpoczynając z wierzchołka 1 rysowanie drogi przechodzącej wzdłuż każdej krawędzi dokładnie jeden raz, rysujemy czerwoną linię najpierw wzdłuż jednej z trzech krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Następnie prowadzimy długopis wzdłuż innych krawędzi – oczywiście cały czas nie odrywając go od papieru – aż w pewnym momencie przesuwamy długopis wzdłuż drugiej krawędzi o końcu w wierzchołku 1, docierając w ten sposób do tegoż wierzchołka. Sytuację mamy teraz taką, iż dwie krawędzie wychodzące z wierzchołka 1 są już zamalowane na czerwono. Tylko trzecia krawędź wychodząca z tego wierzchołka nie jest jeszcze zamalowana. I właśnie tą krawędzią wychodzimy z wierzchołka 1. Z dotychczasowych rozważań płynie wniosek, że droga, zaczynająca się w wierzchołku 1 i prowadząca przez każdą krawędź dokładnie jeden raz, z całą pewnością nie kończy się w tym samym wierzchołku, w którym wzięła początek. Powstaje pytanie: w którym wierzchołku kończy się ta droga? Czy może mieć swój koniec w wierzchołku, z którego wychodzą dwie krawędzie? Rozważmy to. Zastanówmy się, czy rozpatrywana droga może mieć koniec na przykład w wierzchołku 8, z którego wychodzą właśnie dwie krawędzie. Starając się narysować tę drogę, musielibyśmy w pewnym momencie po raz pierwszy poprowadzić długopis wzdłuż jednej z dwóch krawędzi, których końcem jest wierzchołek 8. Oczywiście poprowadzilibyśmy go w stronę wierzchołka 8. Po dojściu do tego wierzchołka – ponieważ nie można odrywać długopisu od kartki, ani przesuwać go wzdłuż krawędzi zaznaczonej wcześniej – możemy postąpić w jeden możliwy sposób: wyprowadzić długopis z wierzchołka 8 drugą, nie zamalowaną dotąd krawędzią. Jest rzeczą oczywistą, że od tego momentu nie ma już powrotu do wierzchołka 8. Z tego wniosek, że droga, zaczynająca się w wierzchołku 1 i przechodząca przez każdą krawędź dokładnie jeden raz, nie może kończyć się w wierzchołku 8. Oczywiście nie może również kończyć się w żadnym innym wierzchołku grafu, który jest końcem dwóch krawędzi. Takie samo rozumowanie, z niewielkimi modyfikacjami, dowodzi, że droga taka nie może także kończyć się w żadnym innym wierzchołku, który jest końcem nie tylko dwóch, ale dowolnej parzystej liczby krawędzi. Wynika z tego, że końcem rozpatrywanej drogi może być tylko wierzchołek, który jest końcem nieparzystej liczby krawędzi, a więc w naszym przypadku wierzchołek 6.

Podsumujmy nasze dotychczasowe rozważania. Z wcześniej przeprowadzonego rozumowania wynika, że jeżeli w naszym grafie w ogóle istnieje jakaś droga, prowadząca przez każdą krawędź dokładnie jeden raz, to musi ona brać swój początek w wierzchołku będącym końcem nieparzystej liczby krawędzi, czyli w wierzchołku 1, albo w wierzchołku 6. Następnie wykazaliśmy, że droga taka musi również kończyć się w wierzchołku, z którego wychodzi nieparzysta liczba krawędzi – lecz nie w tym samym, z którego wzięła początek. Zatem poszukiwana przez nas droga albo zaczyna się w wierzchołku 1 i kończy się w wierzchołku 6, albo odwrotnie: zaczyna się w wierzchołku 6 i kończy się w wierzchołku 1. Innych możliwości nie ma. Ponieważ z tekstu zadania wiemy, że Carlota mieszka na wyspie, więc poszukiwana przez nas droga musi kończyć się w wierzchołku, który odpowiada właśnie wyspie. Wierzchołek 1 odpowiada wybrzeżu (Costa Arenosa), a wierzchołek 6 wyspie (Isla Menuda). Zatem szukana droga, jeśli w ogóle istnieje, musi mieć początek w wierzchołku 1, a koniec w wierzchołku 6.



Teraz, gdy wiemy skąd zaczynać rysowanie drogi, z łatwością ją odtworzymy. Widać ją na rysunku.

Liczby obok strzałek oznaczają, którym w kolejności fragmentem drogi jest ta konkretna krawędź.

Dróg, przechodzących przez każdą krawędź dokładnie jeden raz i spełniających ponadto inne warunki zadania, jest wiele, ale każda z nich ma początek w wierzchołku 6, a koniec w wierzchołku 6. A zatem Carlota mieszka na Isla Menuda, a jej szkoła znajduje się na Costa Arenosa.

Eugeniusz Sikorski

Łamanie głowy czyli burza w mózgu

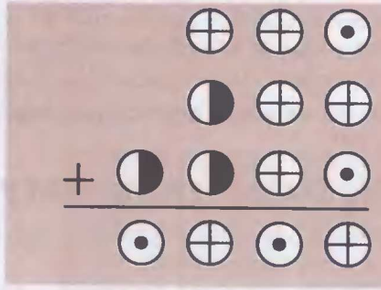
1. Rzekł Twardowski...

Oto wierszowane zadanie z jednej ze starych książek matematycznych. Nie podajemy jakiej, by za bardzo nie ułatwiać. Poniższą rymowankę trzeba przetłumaczyć na język matematyki i rozwiązać zadanie.

Rzekł Twardowski raz do żaka:
„Niech umowa stanie taka:
Gdy przebiegniesz most ten cały,
Zdwoję twoje kapitały.
Ty zaś potem mi w nagrodę
Po 8 groszy rzucaj w wodę!"
Żaczek chętnie przez most leci
Raz i drugi, w końcu trzeci...
Nagle woła: „Jakaś zdrada!
Ani grosza nie posiadam!"
Czy obliczysz (wnet zobaczę)
Ile groszy miał ten żaczek?

2. Kryptogram

Oto dodawanie, w którym każda cyfra oznaczona została odpowiednim symbolem:



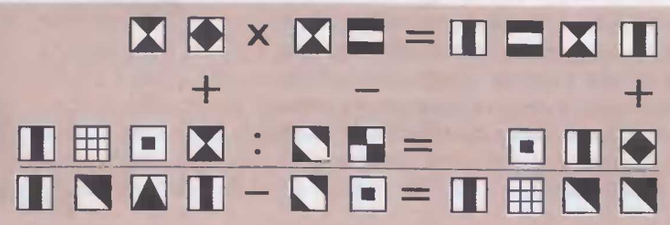
Przy czym różnym symbolom odpowiadają różne cyfry, natomiast takie same symbole oznaczają tę samą cyfrę.
Jak wygląda całe dodawanie?

3. Żarówki w piwnicy

Dwa piwniczne pomieszczenia połączone są dość długim korytarzem. Oba pomieszczenia są niskie – nie można się nawet wyprostować. Znajdujemy się w pierwszym pomieszczeniu, w którym są trzy włączniki. W drugim pomieszczeniu zwisa z sufitu żarówka. Możemy przejść z pierwszego pomieszczenia do drugiego, ale wrócić już nie możemy. **W jaki sposób stwierdzić, który z 3 włączników włącza żarówkę, jeśli z pierwszego pomieszczenia nie widać, czy żarówka świeci się w drugim?**

4. Algebraf

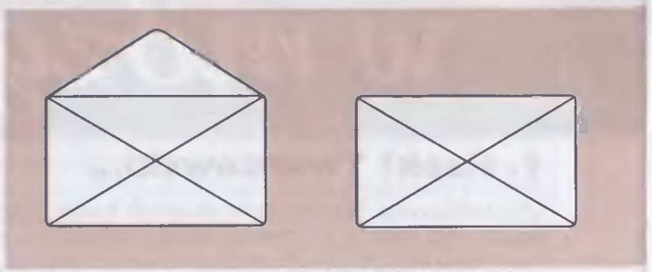
W niniejszym, trzeba szczerze przyznać, niełatwym algebrafie symbole należy zastąpić cyframi w taki sposób, aby powstałe liczby tworzyły poprawne działania. Takim samym kwadracikom muszą odpowiadać oczywiście identyczne cyfry, a różnym kwadracikom – różne cyfry.



5. Po przyjęciu

Skończyło się przyjęcie, wszyscy udają się parami do domów. Podczas pożegnania wymieniono sto dwanaście uścisków dłoni. Przyjęcie przebiegało i zakończyło się w miłym nastroju, pary skierowały się do domów wspólnie, wobec tego nie ściskały sobie rąk. **Ile osób było na przyjęciu?**

6. Koperty



Postaraj się narysować, nie odrywając ołówka od papieru i prowadząc go po każdej linii dokładnie jeden raz, dwie koperty: jedną otwartą, drugą zamkniętą. Co zauważyłeś?

Uwaga: wolno przecinać już narysowaną linię.

7. Przepowiednia Nostradamusa

Nostradamus, słynny astrolog i numerolog, zapytany jakie będą w przyszłości lata wyjątkowe, odpowiedział: „To, co powiem, dotyczy nie tylko lat najbliższych, ale również odległej przyszłości. Latami wyjątkowymi czterocyfrowymi będą te, których zapis w układzie dziesiątkowym ma następującą postać: **ABCD**, gdzie dwucyfrowe liczby **AB**, **CD** i **BC** (oczywiście zapisane również w układzie dziesiątkowym) powiązane są zależnością: **AB + CD = BC**, gdzie przez **AB**, **CD** i **BC** rozumie się liczby dwucyfrowe zapisane również w układzie dziesiątkowym. Dopuszcza się przypadek **C = 0**, przyjmując, że **CD** jest wtedy liczbą jednocyfrową **D**".

Przykładem roku wyjątkowego jest rok **1208 (12 + 08 = 20)**.

Ile jest wszystkich czterocyfrowych lat wyjątkowych i jakie będą dwa najbliższe takie lata po roku 1999?

8. Dzieci matematyka (2)

Podczas przerwy w obradach pewnego kongresu matematyków zapytano jednego z profesorów, czy ma dzieci i w jakim wieku.

– Owszem – powiedział profesor. – Mam trzech synów. Tak się składa, że wszyscy trzej mają dziś urodziny. Jeżeli ich wiek, wyrażony w latach, pomnożę przez siebie, otrzymam 36; jeżeli zaś dodam te trzy liczby, to otrzymam akurat dzień, który dziś mamy.

– To za mało danych, żeby ustalić wiek twoich synów – odpowiedziano profesorowi.

– Ach, prawda, zapomniałem powiedzieć, że kiedy oczekiwaliśmy urodzin najmłodszego dziecka, dwóch starszych chłopców odesłaliśmy na wieś do dziadków.

– No tak, to wystarczy, teraz już znamy wiek całej trójki.

Ustal, ile lat mają dzieci profesora, a także, którego dnia miała miejsce rozmowa.

9. Rodzinne grzybobranie

Cała rodzina wybrała się na grzybobranie. Marek znalazł tyle samo prawdziwków, co jego syn, a Tomasz zebrał trzy razy więcej prawdziwków niż jego syn. Beata, żona Marka, i Agnieszka, żona Tomasza, znalazły razem dwa razy więcej prawdziwków niż syn Marka. Cała rodzina uzbierała łącznie 77 prawdziwków.

Ile prawdziwków znalazł Marek?

10. Rogacze z Bagdadu

Dawno temu rządził w Bagdadzie okrutny kalif, który ubzdurał sobie, że w mieście jest za dużo niewiernych żon. Rozkazał więc ogłosić swemu wezyrowi następujący edykt:

„W tym mieście roi się od niewiernych żon. Rozkazuję każdemu mężowi, który odkryje wiarołomność swej żony, aby zabił ją w nocy następującej po dniu, kiedy dowie się o swoim nieszczęściu".

W Bagdadzie nikt nie ośmielał się okazać kalifowi nieposłuszeństwa. Ale Bagdad był też miastem, w którym każdy dokładnie wiedział, co się dzieje u innych mieszkańców, będąc przy tym niezdolnym do uświadomienia sobie własnego nieszczęścia. Ponadto nie praktykowano tam donosicielstwa. Nic nie zdarzyło się więc podczas pierwszej nocy, nic podczas drugiej i nic podczas trzeciej. Jednak podczas czwartej nocy aż cztery niewierne żony zostały zabite przez swoich mężów. **Dlaczego?**

11. Łamanie linii

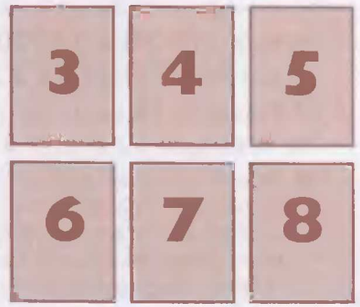
Należy połączyć 9 punktów widocznych na rysunku linią łamaną utworzoną z czterech odcinków prostej.

12. Wyciąg krzesełkowy

Pewien narciarz postanowił wjechać na górę wyciągiem krzesełkowym mającym 100 krzesełek ponumerowanych od 1 do 100. Wsiadł na dolnej stacji i w czasie jazdy w górę obserwował numery mijanych krzesełek. Kiedy znalazł się na szczycie stwierdził, że wśród 99 krzesełek, które minął, siedem miało numery będące podzielnikami numeru krzesełka, na którym siedział. Numer zaś jego krzesełka był podzielnikiem jedynie trzech numerów mijanych krzesełek. **Jaki numer miało krzesełko narciarza?**

13. Tasowanie kart

Spośród sześciu kart widocznych na rysunku dwie należy przemieścić w taki sposób, żeby suma cyfr odczytanych na kartach w pierwszym rzędzie była równa sumie cyfr odczytanych na kartach w drugim rzędzie.



14. Wielokąt

Suma kątów w trójkącie jest zawsze równa 180 stopni. **Jaka jest suma kątów w wielokącie o 19998 bokach?**

15. Upominek

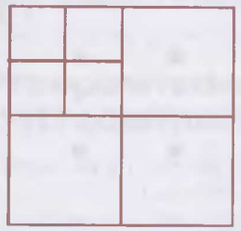
Czy wiecie, co to jest deflacja? To sytuacja, kiedy na rynku jest mniej pieniędzy niż towarów, co powoduje nadwyżkę podaży nad popytem a w konsekwencji spadek cen.

Cheapland jest krajem z galopującą deflacją. Nie dość, że towary, których ceny są tu zawsze liczbami całkowitymi, nie są drogie, to jeszcze z roku na rok tanieją. Jeden z upominków chętnie kupowany przez turystów jest dziś znacznie tańszy niż przed rokiem. Jego cena obecna cena jest dokładnie równa wskaźnikowi spadku ceny w ciągu roku, wyrażonemu w procentach. **Ile kosztuje dziś upominek, jeśli przed rokiem jego cena wyrażała się liczbą mniejszą niż 100?**

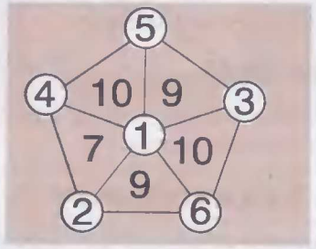
Finał Krajowy Eliminacji XVI Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych

Odpowiedzi do zadań z poprzedniego numeru

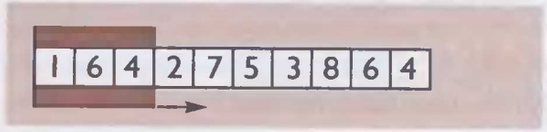
1. Po dwukrotnym przecięciu zwitek ma **7** kawałków włóczki.
2.



3.



4. Nazwy mijanych miejscowości: **B, C, D, A, E**.
5.



6. Jarek otrzymał **8**, a Darek **20** zł.
7. Kod otwarcia skrzyni to **2 2 2 2 4 2**.
8. Zosia miała **12** czerwonych piłeczek.
9. W konkursie uczestniczyło **6** dziewcząt.
10. Obwód zakreskowanego prostokąta to **6** cm.
    Rozwiązanie tego zadania opiera się na spostrzeżeniu, że z boków czterech wyróżnionych małych prostokątów można złożyć brzeg dużego prostokąta oraz brzeg prostokąta zakreskowanego. Obwód x zakreskowanego prostokąta możemy więc otrzymać z równania: $34 + x = 14 + 9 + 7 + 10$.
    Po łatwym rachunku mamy $x = 6$ cm.
11. Mistrz wykona **2** pionowe ruchy. Pierwszy usunięty przez Mistrza pionek ma numer **4** lub **5**.
    Aby rozwiązać to zadanie należy zauważyć, że w tej grze planszowej pierwszy ruch musi być wykonany wzdłuż linii pionowej i ruchów wzdłuż tej linii musi być co najmniej dwa. Następnie wystarczy wskazać 15 dopuszczalnych ruchów, wśród których tylko dwa będą wykonane wzdłuż linii pionowych. Taki ciąg można zanotować pisząc numery pionków, które w podanej kolejności będą zdejmowane z planszy. Może to być np. ciąg 5, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 7, 15, 3, 11, 8 i 13. W tym przypadku w pierwszym ruchu pionek o numerze 13 przeskakuje pionek o numerze 5. Może to być również ciąg 4, 5, 13, 6, 14, 2, 10, 7, 3, 11, 8, 16, 1 i 9. W tym przypadku w pierwszym ruchu pionek o numerze 12 przeskakuje pionek o numerze 4. Mogą być inne ciągi ale każdy z nich musi rozpoczynać się liczbą 5 albo liczbą 4.

12. **Jest pięć rozwiązań**. Piotr mógł uzyskać następujące wyniki: **61, 65, 68, 75** lub **100**.
13. W tej grupie było **4** chłopców.
    Oznaczmy przez N liczbę chłopców w grupie i ponumerujmy ich kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do N. Rozwiązanie zadania opiera się na dwóch spostrzeżeniach. Po pierwsze: liczba N jest dzielnikiem naturalnym liczby 84 $N \geq 3$, i spełniony jest warunek $\frac{84}{N} \geq N - 1$. Wobec tego N jest jedną z liczb 3, 4, 6 lub 7. Po drugie: Jeżeli przez $x_1, x_2 \ldots x_N$ oznaczymy liczby orzechów posiadanych przez chłopców po kolejnym etapie wymiany, to każda z różnic $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, ..., $x_2 - x_3$, ..., $x_{N-1} - x_N$ jest liczbą całkowitą, niekoniecznie dodatnią, ale zawsze podzielną przez liczbę N. Wynika to stąd, że na początku zabawy wszystkie wymienione różnice były równe 0, a po każdej operacji wymiany orzechów różnice te albo nie ulegają zmianie, albo zmieniają się o wielokrotność liczby N. Jeżeli bowiem w pewnym momencie chłopcy o numerach 1, 2, ...,N mieli odpowiednio po $x_1, x_2 \ldots x_N$ orzechów i np. chłopiec o numerze 1 dał każdemu z pozostałych po k orzechów, to po tej operacji omawiane różnice pozostają niezmienione dla chłopców o numerach $i, j = 2,3,\ldots N$, gdyż $(x_j + k) - (x_i + k) = x_j - x_i$, a różnice $x_j - x_1$, $j = 2,3,\ldots,N$ zmieniają się o wielokrotność liczby N, gdyż $(x_j + k) - (x_1 - k(N-1)) = (x_j - x_1) + kN$.
    Teraz wystarczy wykorzystać informację podaną w treści zadania, że po zakończeniu zabawy jeden z chłopców miał 8 orzechów, a jeden z pozostałych miał 0 orzechów. Liczba chłopców w grupie musi być wobec tego także dzielnikiem liczby $8 - 0 = 8$. Ostatecznie otrzymujemy, że $N = 4$.
14. Ułamek 2/3 znajduje się na $2 \cdot 3^9$ miejscu.
15. $\mathbf{r_{2002} = 2001,5}$
16. Kąty równoległoboku: **45° i 135°**
17. Suma kątów: **90°**
18. Minimalna odległość: $10\sqrt{2}/\sqrt{3}$ cm.

Odpowiedzi do zadań zawartych w artykule „Liczbowe palindromy" w 1. numerze MMM:

1. Jest **90** palindromów trzycyfrowych.
2. Są 3 palindromy trzycyfrowe, będące kwadratami liczb całkowitych (są to liczby: **121**, **484**, **676**).
3. Trzycyfrowa liczba, która po odbiciu w lustrze zmniejszy się 45 razy, to **810**.
4. Palindromy, które po dodaniu do 1993 dadzą również liczbę palindromiczną, to **9**, **999** oraz **8008**.

Odpowiedź do zadania dla Czytelników z pierwszej części „Gier w matematyce elementarnej"

Gracz rozpoczynający grę ma strategię wygrywającą dla wszystkich nieparzystych n, które przy dzieleniu przez 8 dają resztę 3,5 lub 7.

Uwaga. W tej grze pozycjami są pary (x, p), gdzie x oznacza liczbę zapałek leżących na stole, a p jest liczbą zapałek w pudełku tego gracza, który ma wykonać ruch.

reklama reklama reklama
reklama reklama reklama
RADIO ram 89.8 FM
reklama reklama reklama
reklama reklama reklama

Kupon konkursowy „MMM" 1/2003

Liczba rozwiązań: . . . . . .

Wśród Czytelników, którzy do końca marca 2003 nadeślą prawidłowe rozwiązania zadań z działu „Łamanie głowy...", rozlosujemy nagrody.

Główna nagroda (za rozwiązanie przynajmniej 12 zadań) – **200 zł**

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) po – **100 zł**

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) po – **50 zł**

Rozwiązania można przysyłać na kartkach pocztowych lub w kopertach z naklejonym kuponem konkursowym pod adresem redakcji. Na kuponie prosimy wpisać liczbę rozwiązanych zadań.

„Ze wszystkich nauk humanistycznych matematyka jest najbardziej humanistyczna".

Hans Freudenthal

„Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat".

Galileusz

„Wstępujcie do świątyni liczb, bo tu są bogowie".

Heraklit z Efezu

1
438
132
2681
912
2
3614
7
512
kielbie...