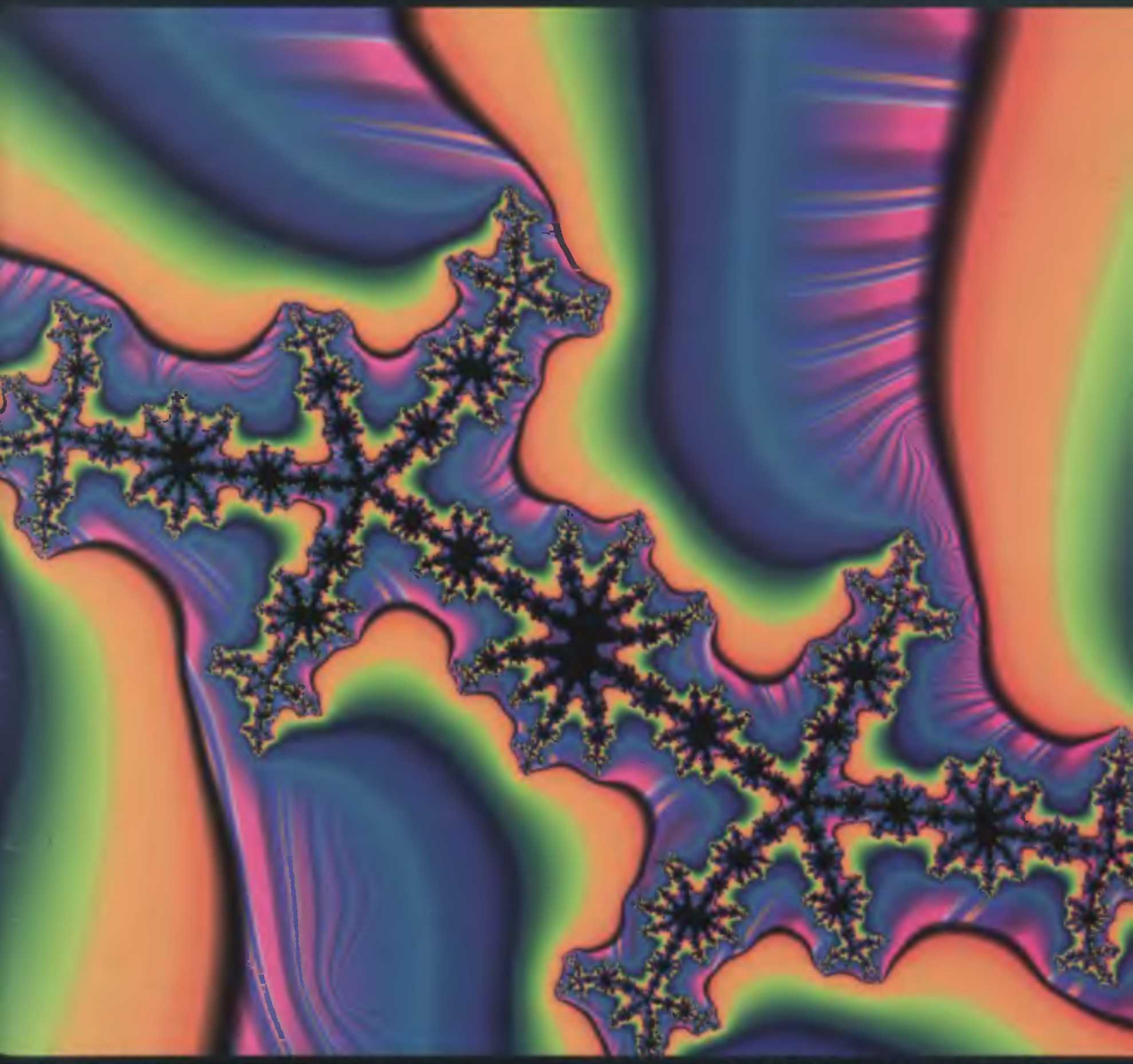
mmm

magazyn miłośników matematyki

kwartalnik nr 1 wrzesień 2002 cena 5 zł (0% VAT) ISSN 1643-9481 indeks 372366



W numerze: Matematyczne zmagania, Z życia liczb, Matematyka od podstaw, Łamanie głowy, czyli burza w mózgu...

„W każdej wiedzy jest tyle prawdy, ile jest w niej matematyki".

Immanuel Kant

„Matematyka wyposaża nas w coś jakby nowy zmysł".

Karol Darwin

„Wszystkie zjawiska natury są tylko matematycznymi konsekwencjami niewielkiej liczby niewzruszonych praw".

Pierre Simon de Laplace

„Liczby rządzą światem".

Pitagoras

Drodzy Czytelnicy!

Oddajemy w Wasze ręce pierwszy numer „Magazynu Miłośników Matematyki".

Jest to czasopismo przeznaczone nie dla specjalistów, lecz dla interesujących się tą dziedziną uczniów gimnazjów, którzy chcą poszerzyć swoje wiadomości, oraz wszystkich lubiących matematyczne zagadki i łamigłówki. Ma ono charakter samouczka, to znaczy, że jest tak redagowane, aby można było z niego korzystać samodzielnie, bez pomocy nauczyciela. O takim jego charakterze przesądza dział „Matematyka od podstaw", gdzie każde zadanie ma szczegółowe rozwiązanie. Dzięki temu, choć czasopismo to redagujemy przede wszystkim z myślą o gimnazjalistach, mogą z niego korzystać również uczniowie starszych klas szkoły podstawowej. Z całą pewnością będzie ono także atrakcyjne dla licealistów, a to za sprawą zadań menedżerskich, które pojawią się w „MMM" wkrótce.

Na łamach „MMM" przedstawiane i rozwiązywane będą liczne zadania logiczne. Zadania te, w polskiej szkole prawie nieobecne, mają ogromne znaczenie dla rozwoju intelektualnego młodzieży. Wiele miejsca poświęcimy zadaniom tekstowym, gdyż spełniają one niezwykle ważną rolę w wykształceniu młodego człowieka. Chodzi tu o zadania rozwiązywane za pomocą równań, układów równań oraz nierówności. W przypadku tych zadań trzeba bowiem najpierw problem sformułowany słownie przetłumaczyć na język algebry - to znaczy zapisać go w postaci odpowiedniego równania, nierówności lub układu równań – następnie rozwiązać go na gruncie algebry i na koniec przetłumaczyć otrzymane rozwiązanie z powrotem na język potoczny. Dydaktycy matematyki uważają tę formę uczniowskiej aktywności za szczególnie wartościową. Przypomina ona bowiem w pewnym stopniu postępowanie uczonych, którzy posługują się matematyką w rozwiązywania problemów.

Zadania zamieszczane w dziale „Matematyka od podstaw" będą miały szczegółowe rozwiązania opatrzone drobiazgowym komentarzem. W rozwiązaniach tych nigdy nie będziemy wychodzić poza metody matematyki elementarnej. A wszystko dlatego, aby z „MMM" mogli korzystać w równym stopniu uczniowie zdolni, chcący pogłębić swoje umiejętności, jak również przeciętni, którzy w przyszłości chcą być z matematyki uczniami bardzo dobrymi i celującymi.

Dla miłośników „główkowania" przeznaczony jest dział „Łamanie głowy czyli burza w mózgu". Znajdziecie w nim zadania logiczne, łamigłówki liczbowe i rysunkowe a także przezabawne „zagadki lateralne". Dla tych, który głębiej interesują się teorią gier i chcą zmierzyć się z poważniejszymi problemami, przeznaczony jest dział „Matematyczne zmagania". Oprócz artykułów problemowych będziemy zamieszczać w nim zadania z mistrzostw w grach matematycznych i logicznych, a także zadania eliminacyjne do kolejnych edycji tego konkursu.

Redakcja

w numerze:

Matematyczne zmagania 2
Jubileuszowe główkowanie 2
Gry w matematyce rekreacyjnej (1) 6
Od problemu Flawiusza... 13
Z życia liczb 14
Liczbowe palindromy 14
Matematyka od podstaw 16
Zadania z rozwiązaniami 16
Zadanie 1 – Żołędzie dla zoo 22
Zadanie 2 – Owocowe zakupy, czyli procenty, procenty, procenty... 25
Zadanie 3 – Ile lat...? 27
Zadanie 4 – Plażowa dedukcja 29
Łamanie głowy, czyli burza w mózgu 32
Zagadki lateralne 36

MMM
magazyn miłośników matematyki

RADA REDAKCYJNA:
Rościsław Rabczuk
Zbigniew Romanowicz
Eugeniusz Sikorski
Sławomir Suchanowski

ZESPÓŁ REDAKCYJNY:
Eugeniusz Sikorski – redaktor naczelny
Zbigniew Gosławski – sekretarz redakcji
Adam Łowczycki – projekt okładki
Andrzej Duliba – grafika komputerowa, DTP
Krzysztof Skwark – menedżer tytułu

ADRES REDAKCJI:
ul.Kościuszki 142, 50-439 Wrocław
tel.(0-71) 342-20-56, e-mail: mmm@atut.ig.pl

Za treść reklam i ogłoszeń redakcja nie odpowiada. Niezamówionych materiałów redakcja nie zwraca. Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadesłanych tekstów.

ISSN 1643-9481

WYDAWCA:
Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe

Matematyczne zmagania

Jubileuszowe główkowanie

11 maja 2002 w salach audytoryjnych Politechniki Wrocławskiej i Uniwersytetu Wrocławskiego odbył się finał krajowy eliminacji XVI Międzynarodowych Mistrzostw w Grach Matematycznych i Logicznych, w którym uczestniczyło 370 zawodników z całej Polski. Była to już dziesiąta - jubileuszowa - polska edycja tej prestiżowej międzynarodowej imprezy popularyzującej matematykę, którą zapoczątkowali w 1987 roku Francuzi.

W pierwszym, korespondencyjnym, etapie konkursu startowało 1994 zawodników, a w półfinale uczestniczyło ich 1653.

Tegoroczny finał miał szczególnie odświętną oprawę. Powodem był nie tylko jubileusz ale też obchodzony właśnie Rok Steinhausa.

A oto lista laureatów i liczby finalistów w poszczególnych kategoriach:

CE *(14 uczniów klasy 3 Szkoły Podstawowej)*

1. Aleksander Pacion SP nr 55 w Szczecinie
2. Anna Lamperska SP nr 46 we Wrocławiu
3. Paweł Lipski SP nr 49 w Gliwicach

CM *(27 uczniów klasy 4 Szkoły Podstawowej)*

1. Andrzej Dorobisz SP nr 56 w Krakowie
2. Jakub Seweryn SP nr 21 w Białymstoku
3. Krzysztof Chrząszcz SP nr 175 w Warszawie

C1 *(46 uczniów klas 5 i 6 Szkoły Podstawowej)*

1. Michał Mazurkiewicz SP nr 13 w Gorzowie Wlkp.
2. Aleksandra Bonek SP nr 98 w Krakowie
3. Marcin Koziak Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna I stopnia w Krakowie

C2 *(143 uczniów klas 1, 2 i 3 Gimnazjum)*

1. Łukasz Garncarek Publiczne Gimnazjum nr 1 w Opolu
2. Jakub Purski Gimnazjum nr 1 w Rawie Mazowieckiej
3. Katarzyna Kaczmarek Gimnazjum Akademickie w Toruniu

L1 *(88 licealistów)*

1. Paweł Parys LO w Tarnowskich Górach
2. Andrzej Machulec LO nr 3 w Katowicach
3. Wojciech Wąs LO nr 1 w Łodzi

L2 *(16 studentów)*

1. Anna Styrcz (Kielce) I rok Wydz. Mat.-Fiz. Uniwersytetu Jagiellońskiego
2. Piotr Skibiński (Rzeszów) II rok Wydz. Fizyki Uniwersytetu im. Kardynała Wyszyńskiego
3. Michał Kijak (Olkusz) III rok Wydz. Chemii Uniwersytetu im. Kardynała Wyszyńskiego

HC *(16 zawodowych matematyków)*

1. Bartłomiej Dyda doktorant w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej
2. Zbigniew Skrzypczyk nauczyciel matematyki w LO w Jaworze
3. Piotr Więcek doktorant w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej

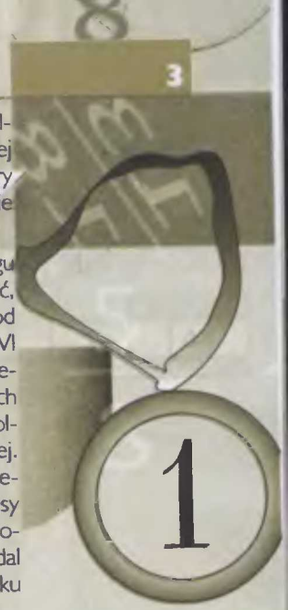
GP *(20 dorosłych różnych profesji)*

1. Piotr Mazur informatyk ze Złotoryi
2. Wiesław Paśko mgr inż. mechanik z Goleniowa
3. Jan Nowakowski specjalista ds. analiz i badań rynku z Opola

NAGRODY

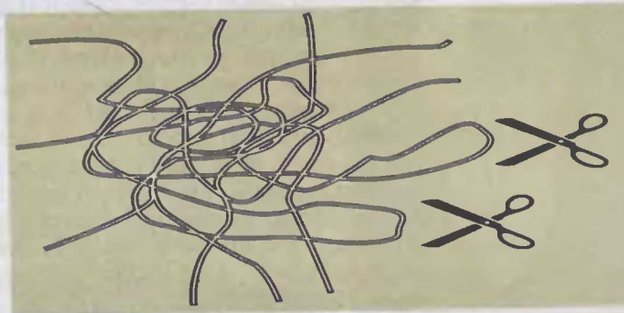
O wysokim poziomie zawodników, np. w najliczniejszej kategorii C2, może świadczyć fakt uzyskania przez 12 z nich w regulaminowym czasie 180 minut maksymalnej liczby punktów za prawidłowe i kompletne rozwiązania 7 zadań. Zwycięzcami jury ogłosiło tych zawodników, którzy rozwiązali wszystkie zadania w najkrótszym czasie (109, 113 i 114 minut).

W kategorii HC zdobywca 1 miejsca rozwiązał, jako jedyny zawodnik, w ciągu niespełna 2 godzin 12 zadań, co może być uznane za swoisty rekord. Warto wiedzieć, że Bartłomiej Dyda uczestniczy w Konkursie Gier Matematycznych i Logicznych od 1992 i będąc jeszcze uczniem klasy VIII SP startował w finale międzynarodowym VI Mistrzostw Francji w Grach Matematycznych i Logicznych w Ecole Polytechnique-Palaisau pod Paryżem, a w 2001 zdobył brązowy medal w XV Międzynarodowych Mistrzostwach w Grach Matematycznych i Logicznych w kategorii L2 - już jako absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. Oprócz niego wśród tegorocznych laureatów i finalistów z pierwszej dziesiątki w kategoriach C1, C2, L1, L2 i HC znalazło się wielu zawodników, którzy odnieśli sukcesy również w poprzednich edycjach konkursu i uczestniczyli w finałach międzynarodowych w Paryżu, m.in. Paweł Parys, który zdobył tam w 1998 roku srebrny medal w kategorii C2 i Łukasz Garncarek - też srebrny medalista w kategorii C2 w roku 2001.



Poniżej zamieszczamy 18 zadań, z którymi zmagali się finaliści (odpowiedzi w następnym numerze).

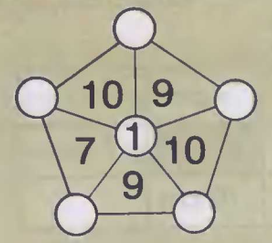
Kategoria CE: zadania o numerach od 1 do 5
Kategoria CM: zadania o numerach od 3 do 8;
Kategoria C1: zadania o numerach od 5 do 11;
Kategoria C2: zadania o numerach od 7 do 13;
Kategoria L1 i GP: zadania o numerach od 7 do 16;
Kategoria L2 i HC: zadania o numerach od 7 do 18.



1. Zwitek włóczki składa się z pewnej liczby kawałków, których wszystkie końce widoczne są na rysunku. Marek przeciął nożyczkami jeden wystający kawałek, a następnie przeciął jeszcze raz jakiś kawałek wystający z tego zwitka. Z ilu kawałków włóczki składa się teraz ten zwitek?

2. Podziel kwadrat na 7 mniejszych kwadratów o bokach równoległych do boków danego kwadratu.

3. W puste kółka figury utworzonej z pięciu trójkątów (patrz rysunek) należy wpisać liczby 2, 3, 4, 5 oraz 6 w taki sposób, aby suma trzech liczb występujących w kółkach tworzących wierzchołki trójkąta była równa liczbie wpisanej wewnątrz tego trójkąta. W kółko będące wspólnym wierzchołkiem wszystkich pięciu trójkątów wpisano już liczbę 1.



4. Jadąc drogą prostoliniową mijamy 5 miejscowości A, B, C, D i E. Wiadomo, że z miejscowości A do B jest 16 km, z A do D jest 6 km, z A do E jest 16 km, z C do D jest 6 km i z D do E są 22 km. Odległości mierzone są wzdłuż drogi. **W jakiej kolejności mijamy te miejscowości, jeżeli przez miejscowość D przejeżdżamy wcześniej niż przez miejscowość A?**

5. Na początku taśmy podzielonej na 10 jednakowych pól kwadratowych ustawione jest okienko obejmujące 3 pola taśmy (jak na rysunku). Okienko może być przesuwane wzdłuż taśmy i pozwala na obserwację trzech kolejnych liczb wpisanych w pola taśmy. Julek wpisał w pola taśmy 10 liczb naturalnych i przesuwając okienko za każdym razem o jedno pole taśmy odnotowywał sumy wszystkich ośmiu trójek liczb zaobserwowanych w okienku. Ze zdziwieniem stwierdził, że każda następna suma jest o 1 większa od poprzedniej. Odtwórz liczby, które Julek wpisał w pola taśmy wiedząc, że w pola: drugie i ostatnie wpisał liczby 6 oraz 4, a suma trzech ostatnich wpisanych liczb była równa 18.

6. Adam, Jarek i Darek pojechali na wycieczkę. Roztargniony Adam zapomniał wziąć torebkę z prowiantem i dlatego musiał skorzystać z uprzejmości kolegów. Jarek miał 3 pizze a Darek miał 4 pizze. Wszystkie pizze Jarka i Darka były identyczne i każda kosztowała tyle samo. Chłopcy postanowili podzielić się całym prowiantem i każdy otrzymał taką samą jego część. Adam, znając cenę jednej pizzy, oszacował koszt swojego udziału na 28 zł i wręczył tę kwotę kolegom do podziału. **Jak Jarek i Darek podzielą tę kwotę między siebie, by podział ten był sprawiedliwy?**

7. Zamek skrzyni jest zaszyfrowany sześciocyfrowym kodem. Skrzynia jest zamknięta, gdy układ cyfr zamka tworzy liczbę 499244. W zamku tym nie można zmieniać cyfr niezależnie, ale dopuszczalne są dwie następujące operacje:

– jeżeli po cyfrze 4 następną cyfrą jest 9, to możemy parę 49 zastąpić parą 24,

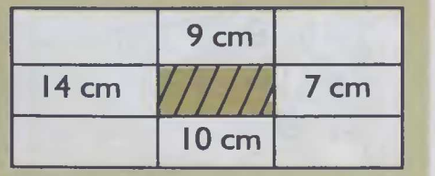
– jeżeli po cyfrze 2 następną cyfrą jest 4, to możemy parę 24 zastąpić parą 92.

Kod, który pozwala otworzyć skrzynię, jest najmniejszą z liczb, którą można otrzymać z liczby 499244, stosując, być może wielokrotnie, dopuszczalne operacje. **Jaki jest ten kod?**

8. Zosia ma piłeczki w pięciu kolorach: białym, niebieskim, zielonym, żółtym i czerwonym. Razem ma 62 piłeczki, przy czym białych ma więcej niż niebieskich, a zielonych ma mniej niż żółtych. Ma też 15 pudełek, po 3 w każdym z wymienionych wyżej kolorów. Zosia wkładała piłeczki kolorami: najpierw białe do białych pudełek, potem niebieskie do niebieskich itd., a na końcu czerwone piłeczki do czerwonych pudełek. Zawsze do jednego z trzech pudełek wybranego koloru wkładała jedną piłeczkę, potem do drugiego pudełka wkładała albo 2 albo 3 piłeczki i wreszcie, do trzeciego pudełka w tym wybranym kolorze wkładała albo 4 piłeczki albo 6 albo 9 piłeczek. Sposób ten stosowała niezależnie do każdego z pięciu kolorów i umieściła w pudełkach wszystkie swoje piłeczki. **Ile czerwonych piłeczek miała Zosia?**

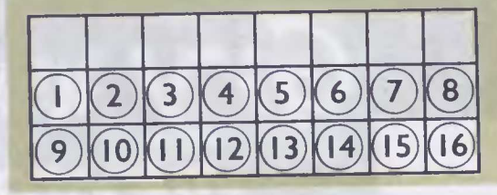
9. W konkursie szkolnym brało udział dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt. Każdy z uczestników konkursu zdobył albo 8 albo 9 albo 10 punktów, a wszyscy razem uzyskali 156 punktów. **Ile dziewcząt uczestniczyło w tym konkursie?**

10. Prostokąt o obwodzie 34 cm jest podzielony na 9 mniejszych prostokątów (patrz rys.) czterema liniami równoległymi do jego boków. Liczby znajdujące się wewnątrz czterech z tych prostokątów oznaczają długości ich obwodów. Jaki obwód, w centymetrach, ma zakreskowany prostokąt?



Uwaga: rysunek nie oddaje rzeczywistych proporcji wymiarów poszczególnych prostokątów.

11. Na planszy prostokątnej 3x8 ustawiamy 16 pionków w drugim i trzecim rzędzie (jak na rysunku). W jednym ruchu możemy przeskoczyć pionkiem przez inny pionek stojący na polu sąsiednim i ustawić go na sąsiednim polu z drugiej strony pionka, którego chcemy przeskoczyć, o ile pole to jest wolne. Możemy jedynie wykonywać ruchy wzdłuż linii pionowych lub poziomych, a nie możemy wykonać ruchu skosem. Ponadto, nie można ani przesuwać pionka na pole sąsiednie, ani przeskakiwać nim przez puste pole. Przeskoczony pionek usuwamy z planszy. Gracz powinien wykonać 15 ruchów w taki sposób, aby po ostatnim ruchu na planszy pozostał jeden pionek. Tytuł Mistrza otrzymuje ta osoba, która wykona najmniej ruchów wzdłuż linii pionowych. **Ile takich ruchów wykona Mistrz? Podać również numer pierwszego pionka usuniętego przez Mistrza z planszy.**

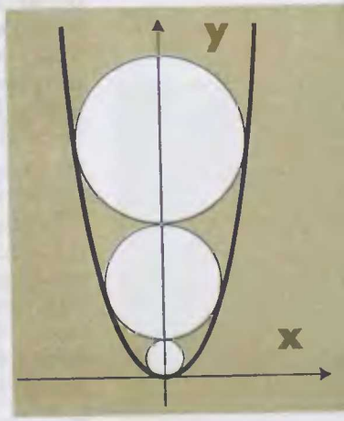


12. Piotr ma poważne problemy z matematyką. Zamiast mnożyć, zawsze dzieli; zamiast odejmować, zawsze dodaje. Nauczyciel polecił mu odjąć liczbę 60 od iloczynu podanych dwóch liczb naturalnych. Szczęśliwym trafem Piotr uzyskał poprawny wynik. **Jaki wynik mógł on uzyskać?**

13. Grupa chłopców podzieliła między siebie 84 orzechy. Każdy z nich otrzymał taką samą liczbę orzechów. Od czasu do czasu, dla zabawy, któryś z chłopców brał część swoich orzechów i rozdawał je każdemu z pozostałych w taki sposób, że każdy z kolegów otrzymał od niego taką samą liczbę orzechów. Po dłuższej zabawie jeden z chłopców nie miał już żadnego orzecha, a jeden z pozostałych miał 8 orzechów. **Ilu chłopców było w tej grupie?**

14. Wszystkie ułamki nieskracalne o mianownikach 3^n, $n = 1, 2, \ldots, 10$, zawarte w przedziale otwartym (0,1) ustawiamy w ciąg rosnący. **Na którym miejscu w tym ciągu znajduje się ułamek 2/3?**

15. Paraboliczny kielich jest powierzchnią otrzymaną z obrotu dookoła osi Oy dolnej części paraboli $y = x^2$ obciętej na odpowiednio dużej wysokości. Do tego kielicha wkładamy kulkę o możliwie największym promieniu r_1, która po opadnięciu na dno kielicha będzie styczna do wewnętrznej powierzchni kielicha w jej najniżej położonym punkcie. Następnie do kielicha wkładamy kolejno kulki o możliwie największych promieniach $r_2, r_3, \ldots, r_{2002}$ tak dobranych, aby kulka o promieniu r_n, $n \geqslant 2$, była styczna do kulki o promieniu r_{n-1}. **Jaki promień ma ostatnia kulka włożona do kielicha?**



16. W równoległoboku mniejszy kąt pomiędzy przekątnymi jest równy 45°, a kąt pomiędzy dłuższą przekątną i dłuższym bokiem równoległoboku wynosi 15°. **Oblicz kąty tego równoległoboku.** Wynik podać w stopniach.

17. Wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A czworościanu ABCD są proste, a krawędzie AB, AC i AD tego czworościanu mają długości: 7 cm, 11 cm i odpowiednio 18 cm. **Obliczyć sumę kątów płaskich czworościanu ABCD przy wierzchołku D.** Wynik podać w stopniach.

18. Magiczna „kula" jest najmniejszą bryłą wypukłą zawierającą trzy okręgi o jednakowej średnicy D = 10 cm i mające wspólny środek O, z których każdy leży w innej z trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn przechodzących przez O. Taką magiczną „kulę" chcemy umieścić pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami. **Wyznaczyć minimalną odległość między tymi równoległymi płaszczyznami, przy której można zrealizować to zadanie.** Wynik podać w centymetrach.

Gry w matematyce rekreacyjnej (1)

Łamigłówki i zagadki matematyczne i logiczne od wieków cieszą się niesłabnącym zainteresowaniem miłośników rozrywek umysłowych zarówno tych najmłodszych, jak i dorosłych niezależnie od wieku i wykształcenia. Wynika to z faktu, że łamigłówki i zagadki tego rodzaju nie tylko bawią, ale jednocześnie uczą a ich rozwiązywanie dostarcza ludziom wielu doznań intelektualnych.

Do tej grupy rozrywek umysłowych należą zadania obejmujące problematykę gier, gdzie o przebiegu jakiegoś procesu decyduje wiele czynników. Mogą to być ludzie (gracze) lub np. siły przyrody, których oddziaływania są niezależne a końcowe cele na ogół przeciwstawne. Na przebieg takich procesów najczęściej mają wpływ czynniki losowe, a efekty końcowe mogą być przypadkowe, dające się przewidzieć z większym lub mniejszym prawdopodobieństwem. Badaniem takich procesów i znajdowaniem najlepszych sposobów postępowania (strategii optymalnych) zajmuje się dział matematyki zwany teorią gier. Obejmuje on różne gry a w tym strategiczne, pozwalające badać i rozstrzygać problemy gospodarczo-ekonomiczne, socjologiczne a także konflikty wojenne. Jest to obszerny i trudny dział współczesnej matematyki mający ważne zastosowanie w różnych dziedzinach, o czym dobitnie świadczy fakt przyznania w 1994 roku nagrody Nobla dla Johna Nasha, Johna Harsanyia i Reinharda Seltena. Doceniono w ten sposób oryginalność pojęć i koncepcji, którymi zajmowali się od lat w całej teorii gier a także w wielu działach ekonomii teoretycznej.

W tym krótkim i popularnym artykule nie mamy zamiaru ani możliwości szerszego przedstawienia złożonych aspektów teorii gier, ani też omówienia formalnych modeli obejmujących różnorodne sytuacje konfliktowe. Ograniczymy się jedynie do przykładów gier towarzyskich, logicznych i arytmetycznych oraz planszowych, które nie wykraczają poza ramy tzw. matematyki rekreacyjnej i które można badać metodami elementarnymi. Będą to z reguły gry dwuosobowe obejmujące ciąg zdarzeń logicznych, operacji arytmetycznych i geometrycznych albo procesy dochodzenia do jakiejś konfiguracji, które po skończonej liczbie ruchów (kroków) kończą się wygraną jednego i przegraną drugiego gracza (wyklucza się remis).

W naszym artykule gra będzie zwykle przedstawiana jako zespół złożony ze:

- zbioru określającego pozycje; w grze mogą to być różne układy figur lub przedmiotów na planszy, może to być zestaw liczb lub klocków, może to wreszcie być jakikolwiek zestaw materialnych elementów,
- zbioru przepisów (reguły gry), które określają, jakie ruchy można wykonywać (ruchy dopuszczalne) z danej pozycji i ustalają sposób zakończenia gry oraz to, który gracz jest zwycięzcą.

Do tych reguł może być zaliczony również sposób ustalania, który z graczy rozpoczyna rozgrywkę tzn. wykonuje pierwszy ruch w grze.

Przebieg konkretnej gry, zwany rozgrywką, jest ciągiem kolejnych pozycji w grze, od pozycji początkowej do końcowej. Przejście z jednej pozycji do następnej jest efektem ruchu wykonanego przez jednego z graczy, gracze wykonują ruchy naprzemiennie, pozycja powstała po ruchu jednego z graczy jest pozycją, z której wykonuje ruch drugi gracz. Na każdym etapie gry pozycje tworzące rozgrywkę zależą od indywidualnych i niezależnych decyzji graczy.

Mówimy, że dana pozycja w grze jest wygrywająca, jeśli dla gracza zajmującego tę pozycję istnieje taki sposób gry, który, niezależnie od sposobu postępowania przeciwnika, prowadzi do wygranej. Dana pozycja jest przegrywająca, jeżeli każdy ruch gracza zajmującego tę pozycję prowadzi jego przeciwnika do pozycji wygrywającej. W rozważanych tu grach każda pozycja będzie albo wygrywająca, albo przegrywająca. Rozwiązanie gry polegać będzie na wyznaczaniu pozycji wygrywających (W) oraz przegrywających (P) w danej grze i na ustaleniu strategii wygrywającej dla gracza rozpoczynającego grę z pozycji wygrywającej.

Podział zbioru wszystkich pozycji w grze na (W) i (P) nazywamy partycją grową. Rozważane przez nas gry będą zawsze miały skończoną liczbę pozycji końcowych, najczęściej jedną; wszystkie rozgrywki w takich grach rozpoczynające się z dowolnie wybranej pozycji początkowej będą skończone i liczba różnych rozgrywek rozpoczynających się z danej pozycji będzie też skończona. Gry te mogą jednak mieć nieskończony zbiór wszystkich pozycji. W takich grach można łatwo znajdować partycję grową, która ma dwie ważne własności pomocne przy ustalaniu strategii:

1. każdy ruch z pozycji przegrywającej prowadzi do pozycji wygrywającej,
2. z pozycji wygrywającej istnieje co najmniej jeden ruch prowadzący do pozycji przegrywającej.

Wykorzystując powyższe własności możemy wyznaczać partycje growe gier metodą rekurencyjną rozpoczynając od pozycji końcowych, które na początku zalicza się do zbioru pozycji przegrywających. Jest to praktyczny i często spotykany sposób rozwiązywania gier „od końca", oparty na następującym algorytmie:

krok 1: do zbioru P pozycji przegrywających w danej grze zaliczamy zbiór pozycji końcowych, który oznaczamy przez P_0;

krok 2: do zbioru W pozycji wygrywających zaliczamy te pozycje, które jednym ruchem można przeprowadzić do jednej z pozycji P_0; zbiór tych pozycji oznaczamy przez W_0;

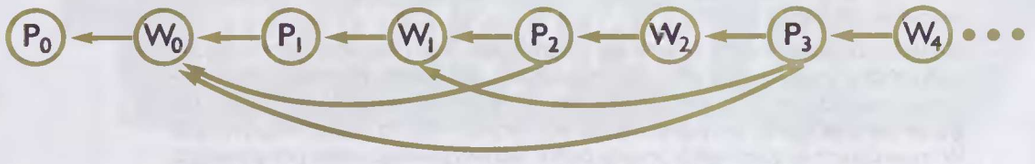
krok 3: do zbioru P zaliczamy te pozycje, z których każdy ruch dopuszczalny prowadzi do pozycji leżącej w zbiorze W_0; zbiór tych pozycji oznaczamy przez P_1;

krok 4: do zbioru W zaliczamy te pozycje, z których istnieje co najmniej jeden ruch dopuszczalny prowadzący do pozycji należącej do zbioru P_1; zbiór tych pozycji oznaczamy przez W_1.

Po tych czterech krokach mamy wyznaczone początkowe fragmenty zbioru pozycji przegrywających i zbioru pozycji wygrywających. Są to fragmenty złożone z pozycji należących do P_0 oraz P_1 i odpowiednio do W_0 oraz W_1. Następne kroki algorytmu polegają na kolejnym uzupełnianiu dotychczas wyznaczonych zbiorów o nowe pozycje. Do wyznaczonych zbiorów P_0, P_1, ..., P_k dołączamy zbiór P_{k+1} tych jeszcze nieuwzględnionych pozycji, z których każdy ruch prowadzi do jakiejś pozycji zaliczonej już do jednego ze zbiorów W_0, W_1, ... W_k, a do zbiorów W_0, W_1, ... W_k dołączamy

zbiór W_{k+1} tych jeszcze nieuwzględnionych pozycji, z których istnieje co najmniej jeden ruch prowadzący do pozycji należącej do zbioru P_{k+1}. Algorytm kończy się, gdy wyczerpiemy wszystkie pozycje gry lub wtedy, gdy ustalimy cechę grową P lub W interesującej nas pozycji, z której mamy rozpocząć grę.

Schemat postępowania można przedstawić diagramem:



Zilustrujmy to na prostym przykładzie gry „w zapałki".

Przykład 1

Mamy 33 zapałki. Gracze A i B wykonują ruchy naprzemiennie i każdy z nich może wziąć z kupki zapałek jedną, dwie ale nie więcej niż trzy zapałki. Pierwszy ruch wykonuje gracz A. Gra kończy się, gdy jeden z graczy weźmie ostatnie zapałki i ten gracz jest zwycięzcą. Czy gracz A rozpoczynający grę ma strategię wygrywającą, tzn. czy pozycja startowa jest wygrywająca?

Rozwiązanie

Jest to przykład gry, którą można przedstawić modelem arytmetycznym. Zbiorem pozycji w tej grze jest zbiór liczb całkowitych nieujemnych $N=\{0,1,2,..\}$, liczba 0 jest pozycją końcową, a gracz będący w pozycji n, n>0, może wykonać jeden z trzech ruchów. Może to być ruch do pozycji $n-1, n-2$ albo do pozycji $n-3$, jeśli $n\geq 3$. Gracz, który znajdzie się w pozycji 0 nie może wykonać już żadnego ruchu i przegrywa. Aby udzielić odpowiedzi na pytanie trzeba sprawdzić, czy w tej grze pozycja $n=33$ jest wygrywająca. Próba wyjaśnienia tej kwestii poprzez analizę możliwych ruchów z pozycji 33, a następnie z pozycji 32, 31, 30 itd., czyli poprzez badanie możliwych rozgrywek z pozycji początkowej $n=33$, już po pierwszych krokach zachęca do zastosowania opisanego wyżej algorytmu i rozwiązania gry od końca, czyli od pozycji 0. Wykonując kolejne kroki algorytmu otrzymujemy zbiory $P_0=\{0\}$, $W_0=\{1,2,3\}$ $P_1=\{4\}$, $W_1=\{5,6,7\}$, $P_2=\{8\}$, $W_2=\{9,10,11\}$, ..., a następnie stwierdzamy, że w rozważanej grze przegrywającymi pozycjami są liczby całkowite nieujemne podzielne przez 4, zaś pozycjami wygrywającymi są liczby całkowite dodatnie niepodzielne przez 4

$$P=\{0,4,8,..\}$$

$$W=\{1,2,3,5,6,7,..\}$$

W szczególności pozycja $n=33$ jest pozycją wygrywającą, a gracz rozpoczynający grę z tej pozycji ma prostą strategię wygrywającą. Polega ona na doprowadzeniu swojego przeciwnika do najbliższej pozycji podzielnej przez 4.

Uwaga 1.

W tej grze moglibyśmy przyjąć, że przegrywa ten z graczy, który wykonuje ostatni dopuszczalny ruch, tzn. bierze ostatnią zapałkę. W takim modelu gry wygrywa gracz, który potrafi zmusić przeciwnika do wykonania ostatniego dopuszczalnego ruchu (do „skoku w przepaść"). Ten model gry można sprowadzić do modelu rozważanego poprzednio, gdzie wygrywa gracz wykonujący ostatni ruch. W przypadku rozważanej gry na zapałkach trzeba przyjąć, że pozycjami będą teraz liczby naturalne $\{1,2,3,..\}$ (odrzucamy pozycję końcową 0), a nową pozycją końcową będzie teraz pozycja 1. W tym modelu pozycjami przegrywającymi będą liczby 1, 5, 9, ..., tzn. liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1, a pozycjami wygrywającymi będą liczby 2, 3, 4, 6, 7, 8, ..., tzn. liczby postaci $4k+2$, $4k+3$ i $4k+4$, gdzie $k=0,1,2,...$. Pozycja startowa $n=33$ jest w tej zmodyfikowanej grze pozycją przegrywającą.

Uwaga 2.

Metodą opisaną w rozwiązaniu gry z przykładu 1 można konstruować partycje growe ogólniejszych gier.

Dwaj gracze wykonują ruchy naprzemiennie i każdy z nich może wziąć z kupki zapałek albo jedną, albo dwie, ale nie może wziąć więcej niż p zapałek, gdzie p jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Gra kończy się gdy jeden z graczy weźmie ostatnie zapałki i ten gracz wygrywa. Gra rozpoczyna się od n zapałek. Dla jakich n gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą? Odpowiedź: dla n niepodzielnych przez $p+1$

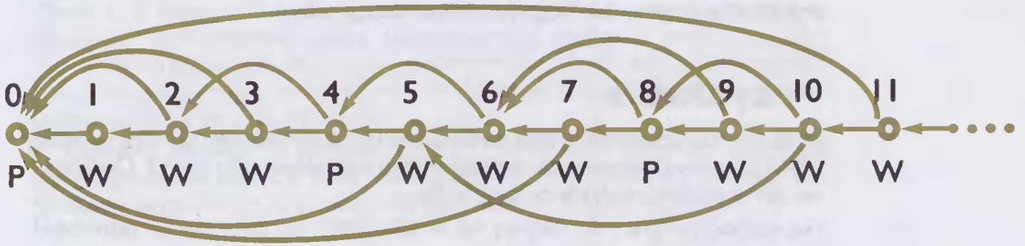
Rozważmy jeszcze jeden przykład gry arytmetycznej.

Przykład 2.

Pozycjami w grze są liczby całkowite nieujemne $N=\{0,1,2,..\}$. Dwaj gracze A i B wykonują ruchy naprzemiennie i gracz wykonujący ruch z pozycji n, n>0, może od tej liczby odjąć albo 1, albo jeden z dzielników pierwszych tej liczby. Wynik tej operacji jest pozycją, z której wykonuje ruch drugi gracz. Gra kończy się, gdy jeden z graczy wykona ostatni ruch dopuszczalny, tzn. gdy wykona ruch do pozycji końcowej 0 i ten gracz jest zwycięzcą. Dla jakich n gracz rozpoczynający grę z tej pozycji ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie

Przedstawmy tę grę za pomocą grafu, w którym wierzchołki (punkty płaszczyzny) są pozycjami w grze a łuki zakończone strzałkami reprezentują ruchy dopuszczalne w grze. Fragment tego grafu pokazuje poniższy rysunek.



Przesuwając się w prawo od punktu 0, tzn. od pozycji końcowej w grze, zauważamy natychmiast, że pozycje 0, 4, 8 są przegrywające, a pozycje 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 są wygrywające. Gdybyśmy narysowali większy fragment tego grafu, stwierdzilibyśmy że widoczne tam pozycje postaci 4k, $k = 0,1,2,...$, są przegrywające a pozostałe są wygrywające. Możemy więc wyrazić przypuszczenie, że jest tak w całym nieskończonym grafie, tzn., że wszystkie pozycje postaci 4k, $k = 0,1,2,...$, tworzą zbiór pozycji przegrywających w rozważanej grze, a pozostałe tworzą zbiór pozycji wygrywających. Aby się o tym przekonać wystarczy sprawdzić, że podział zbioru wszystkich pozycji w grafie na zbiory $P = \{0,4,8,...\}$ i $W = \{1,2,3,5,6,7,9,...\}$ spełnia warunki charakteryzujące partycję growską danej gry, tzn. że:

1° każdy ruch z pozycji należącej do P prowadzi do pozycji należącej do W,

2° z każdej pozycji należącej do zbioru W istnieje ruch prowadzący do pozycji należącej do P.

Pierwszy warunek jest oczywiście spełniony, bo ruch z pozycji 4k, k>0, prowadzi albo do pozycji $4k-1$, albo do pozycji $4k-2$ albo pozycji $4k-p$, gdzie p jest dzielnikiem pierwszym nieparzystym liczby $4k$. Wszystkie pozycje $4k-1$, $4k-2$, $4k-p$ należą do W.

Aby sprawdzić drugi warunek zauważmy, że jeśli pozycja z W ma postać $4k+1$, to pozycja $(4k+1)-1$ należy do P, a jeśli pozycja z W ma postać $4k+2$, to pozycja $(4k+2)-2$ należy do P. W przypadku liczby $4k+3$ także istnieje ruch do pozycji podzielnej przez 4, ale ten fakt nie jest tak natychmiastowy, jak w dwóch poprzednich przypadkach, gdyż liczba 3 nie musi być dzielnikiem liczby $4k+3$. Jednakże liczba postaci $4k+3$ musi mieć dzielnik pierwszy tej samej postaci (tj. $4l+3$), gdyż Czytelnik łatwo sprawdzi, że iloczyn liczb, z których każda jest postaci $4k+1$ jest też liczbą postaci $4s+1$. W ten sposób mamy podział zbioru wszystkich pozycji gry na pozycje przegrywające P i pozycje wygrywające W, a tym samym gra została rozwiązana. W tej grze strategia wygrywająca dla gracza wykonującego ruch z pozycji wygrywającej polega na doprowadzeniu przeciwnika do pozycji podzielnej przez 4. Gracz znajdujący się np. w pozycji 27 odejmie od tej liczby jej dzielnik pierwszy 3 i doprowadzi przeciwnika do pozycji przegrywającej 24.

Rozważmy teraz przykład gry niesymetrycznej, w której jeden z graczy tylko przeszkadza drugiemu w osiągnięciu zamierzonego celu.

Przykład 3

W tej grze dwuosobowej gracze wykonują ruchy naprzemiennie i skreślają po jednej liczbie z zestawu złożonego ze wszystkich liczb naturalnych od 1 do 53. Gra kończy się, gdy pozostaną nieskreślone dwie liczby.

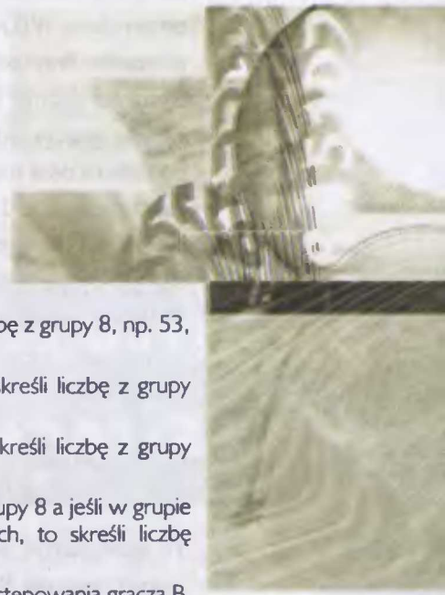
Grę rozpoczyna gracz A i stara się tak skreślać liczby aby suma dwóch pozostałych nieskreślonych liczb była podzielna przez 7. Jeżeli zamiar te zrealizuje, wygrywa. Gracz B stara się mu w tym przeszkodzić.

Czy gracz A może wygrać tę grę niezależnie od tego, jaką taktykę wybierze gracz B?

Rozwiązanie

Aby odpowiedzieć na to pytanie podzielimy zbiór złożony z liczb 1, 2, ..., 53 na 8 grup w następujący sposób:

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43	1.*grupa*
2, 9, 16, 23, 30, 37, 44	2.*grupa*
3, 10, 17, 24, 31, 38, 45	3.*grupa*
4, 11, 18, 25, 32, 39, 46	4.*grupa*
5, 12, 19, 26, 33, 40, 47	5.*grupa*
6, 13, 20, 27, 34, 41, 48	6.*grupa*
7, 14, 21, 28, 35, 42, 49	7.*grupa*
50, 51, 52, 53	8.*grupa*



Gracz A wygra jeżeli w swoim pierwszym ruchu skreśli jedną liczbę z grupy 8, np. 53, a w następnych ruchach:

- po skreśleniu przez gracza B liczby z grupy o numerze (i) skreśli liczbę z grupy o numerze $(7-i)$, i=1, 2, 3, 4, 5, 6.
- po skreśleniu przez gracza B liczby z grupy o numerze 8 skreśli liczbę z grupy o numerze 7.
- po skreśleniu przez gracza B liczby z grupy 7 skreśli liczbę z grupy 8 a jeśli w grupie 8 wszystkie liczby zostały skreślone w poprzednich ruchach, to skreśli liczbę wybraną z grupy 7.

Taka strategia gracza A zapewnia mu wygraną niezależnie od postępowania gracza B.

Przykład 4

W tej grze wygrywa gracz, który zgarnie większość puli.

Agata i Dominika dostały do podziału 20 cukierków i postanowiły rozegrać mecz wykorzystując znaną grę „dziel i bierz". W tej grze gracz mający wykonać ruch dzieli przeznaczone do podziału przedmioty na kupki o tej samej liczbie elementów i jedną z nich bierze dla siebie. Podziału dokonuje według własnego uznania, ale obowiązuje zasada, że liczba elementów w kupce musi być albo liczbą pierwszą, albo musi być równa 1, a kupek musi być co najmniej dwie. Pozostałe po pierwszym podziale przedmioty dzieli następnie według własnego uznania drugi gracz zatrzymując jedną kupkę. Potem gracze wykonują ruchy naprzemiennie. Gdy na stole pozostanie jeden przedmiot, gracz mający wykonać ruch nie dokonuje już podziału, lecz bierze ten przedmiot dla siebie a gra kończy się.

Z losowania wynikło, że pierwszy ruch w grze wykona Dominika. Jaką część cukierków weźmie dla siebie, jeżeli będzie grała umiejętnie? Jaka byłaby odpowiedź na to pytanie gdyby Dominika rozpoczynała grę i miała na stole 21 cukierków?

Rozwiązanie

Znając liczbę cukierków przeznaczonych do podziału nie potrafimy udzielić odpowiedzi na postawione pytanie bez przeprowadzenia dokładnej analizy. Zbadamy jak zmienia się maksymalna wygrana gracza rozpoczynającego grę w zależności od początkowej liczby cukierków. Oznaczmy maksymalną wygraną przez $W(n)$, gdzie n jest liczbą cukierków do podziału. Liczbę $W(n)$ łatwo wyznaczamy dla małych n i otrzymujemy $W(1)=1$, $W(2)=1$, $W(3)=2$. Już dla $n=4$ musimy rozpatrzeć dwa przypadki. Przy podziale na cztery kupki po jednym cukierku $(4=1+1+1+1)$ Dominika weźmie 1 cukierek, Agata weźmie jeden cukierek a następnie Dominika weźmie jeszcze jeden cukierek. Po całej rozgrywce będzie mieć 2 cukierki. Przy podziale na dwie kupki po dwa cukierki $(4=2+2)$ weźmie dwa cukierki i dodatkowo jeszcze jeden, bo $2-W(2)=2-1=1$. Po tej rozgrywce Dominika będzie miała 3 cukierki. Wobec tego $W(4)=3$ i jest to większa z dwóch liczb $4-W(3)$ i $4-W(2)$.

Analiza przypadku $n=4$ sugeruje następujący rekurencyjny sposób wyznaczania $W(n)$ dla większych liczb.

Wyznaczamy wszystkie dzielniki pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_k$ liczby n i wybieramy najmniejszą z liczb

$$W(n-1), W(n-p_1), \ldots, W(n-p_n)$$

i liczbę tę odejmujemy od liczby n. Otrzymana różnica daje nam liczbę $W(n)$.

$$W(n)=n-\min\{W(n-1), W(n-p_1), \ldots, W(n-p_k)\}$$

To spostrzeżenie pozwala obliczać wartości $W(n)$ dla dużych n w zależności od znanych wartości $W(1), W(2), \ldots, W(n-1)$.

Ponieważ liczby $W(1), W(2), \ldots$ tworzą ciąg nieregularny, podobnie jak liczby pierwsze, dla konkretnie ustalonej liczby n wyznaczenie wartości $W(n)$ wymaga zbudowania tabeli, której fragment złożony z dwóch części zamieszczamy poniżej.

n	1	2	3	4		5	6			7	8		9		10		
$W(n)$	1	1	2	3		2	4			3	5		5		8		
$n-p$	-	1	2	3	2	4	5	4	3	6	7	6	8	6	9	8	5
$W(n-p)$	-	1	1	2	1	3	2	3	2	4	3	4	5	4	5	5	2

11	12		13	14		15		16	17	18		19	20		21		
3	9		4	11		7		9	8	11		8	13		10		
10	11	10	9	12	13	12	7	14	12	10	15	14	16	17	16	15	18	19	18	15	20	18	14
8	3	8	5	9	4	9	3	11	9	8	7	11	9	8	9	7	11	8	11	7	13	11	11

W tej tabeli wpisujemy w pierwszym wierszu liczby przedmiotów przeznaczonych do podziału, w drugim wierszu maksymalne wygrane, w trzecim liczby przedmiotów, które może otrzymać do podziału partner gracza rozpoczynającego grę, a w

czwartym jego maksymalne wygrane w zależności od liczby przedmiotów, które otrzyma do podziału po ruchu gracza rozpoczynającego grę. Jeżeli np. n=18, to gracz rozpoczynający ma trzy możliwości p=1, p=2 i p=3; może zostawić na stole albo 17, albo 16, albo 15 przedmiotów, a jego partner może wygrać albo 8, albo 9, albo 7 przedmiotów. Wobec tego $W(18)=18-7=11$

Z tabeli odczytujemy, że Dominika z 20 cukierków weźmie dla siebie 13, a z 21 cukierków zatrzyma już tylko 10 (zakładamy, że dziewczęta grają najlepiej, jak potrafią).

Rościsław Rabczuk, Zbigniew Romanowicz

Zadanie dla Czytelników

Na stole mamy n zapałek i n jest liczbą nieparzystą. Dwaj gracze A i B wykonują ruchy naprzemiennie i każdy z nich w każdym ruchu może wziąć ze stołu jedną, dwie lub trzy zapałki i włożyć je do swojego pudełka. Gra kończy się, gdy jeden z graczy weźmie ostatnie zapałki a wygrywa ten, który w swoim pudełku zgromadzi parzystą liczbę zapałek. Dla jakich nieparzystych n gracz rozpoczynający grę ma strategię wygrywającą? Na początku gry pudełka obu graczy są puste.

Wśród autorów prawidłowych odpowiedzi rozlosujemy nagrody książkowe.

Od problemu Flawiusza do gry w marynarza

Powszechnie znana jest wśród dzieci i młodzieży gra w marynarza. Polega ona na tym, że kilku graczy ustawionych w krąg na dany znak pokazuje pewną liczbę palców jednej lub obu rąk. Liczba S – suma wszystkich pokazanych palców – służy do wykluczania z gry, kolejno, jej uczestników za pomocą odliczania. Rozpoczyna się je od jednego, wybranego losowo uczestnika, któremu przypisuje się liczbę jeden, a następnym przypisuje się, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, kolejne liczby mniejsze lub równe S.

Uczestnik, na którego w trakcie odliczania wypadnie liczba S, wypada z gry. Pozostali w kręgu powtarzają procedurę. Odliczanie tej samej liczby S rozpoczyna się od osoby, która stała po lewej ręce wykluczonego z gry. Gra kończy się, gdy z całego kręgu pozostanie tylko jeden uczestnik.

Gra w marynarza jest zabawową wersją słynnego problemu Józefa Flawiusza – obdarzonego matematycznym talentem historyka z I wieku naszej ery.

Jedna z wersji legendy głosi, że podczas wojny rzymsko-żydowskiej Flawiusz wraz z grupą 40 powstańców żydowskich schronił się w jaskini, którą otoczyli Rzymianie. Osaczeni woleli raczej zginąć niż się poddać. Postanowili utworzyć krąg i pozbawiać życia kolejno co trzecią osobę. Ostatni pozostały przy życiu miał popełnić samobójstwo. Flawiusz, który wraz z przyjacielem nie zgadzał się na tak makabryczne rozwiązanie, szybko obliczył, gdzie on i jego przyjaciel powinni stanąć w kręgu aby, jako dwaj ostatni, mogli ujść z życiem.

Proponujemy Czytelnikom znalezienie numerów Flawiusza i jego przyjaciela przy założeniu, że odliczanie rozpoczyna się od osoby z numerem 1, a pierwsza osoba ponosząca śmierć ma numer 3.

Rościsław Rabczuk, Zbigniew Romanowicz

Wśród autorów prawidłowych odpowiedzi rozlosujemy nagrody książkowe

Z życia liczb

Liczbowe palindromy

Liczbą palindromiczną, bądź po prostu palindromem, nazywamy liczbę całkowitą nieujemną, która czytana od początku i od końca (albo umieszczona przed lustrem) daje tę samą liczbę. Liczby takie nazywane są także czasem liczbami symetrycznymi. Na przykład liczby 0, 9, 22, 131, 232 są palindromami, natomiast liczba 2145 już nie.

Palindromy mają wiele ciekawych własności a wiele dotyczących ich problemów do dzisiaj, mimo szerokiego wykorzystywania komputerów, nie zostało rozstrzygniętych.

Palindrom 828 jest sumą liczb 216 i 612 (czyli o odwróconej kolejności cyfr). Czy zawsze można otrzymać liczby palindromiczne jako sumy pewnej liczby i jej „lustrzanego odbicia"? Kiedy jest to możliwe? Czy istnieją jakieś reguły pozwalające znaleźć te liczby? Czy dodając do dowolnej liczby całkowitej jej „odbicie" (czyli liczbę o odwróconej kolejności cyfr), a następnie powtarzając tę operację z otrzymaną w ten sposób sumą można znaleźć liczbę palindromiczną?

Odpowiedź na to ostanie pytanie z pewnością przekracza możliwości nawet zdolnego ucznia. Zobaczmy jakie rezultaty otrzymali profesjonalni matematycy do 1985 r. Na przykład 89 plus 98 daje sumę 187, która nie jest palindromem. Nie jest też palindromem liczba 968 będąca sumą liczb 187 i 781. Kontynuując tę operację otrzymujemy w końcu po 24 dodawaniach palindrom 8813200023188.

Przypuszczano, że stosując opisane powyżej postępowanie do dowolnej liczby całkowitej otrzymuje się palindrom po skończonej liczbie kroków. Kalifomijski matematyk Charles W. Trigg podważył tę hipotezę. Znalazł on 249 liczb całkowitych, z których każda jest mniejsza od 10000, nie dających palindromów po stu dodawaniach. Najmniejszą z nich jest liczba 196. Inny matematyk z Kalifornii, Dewey C. Duncan, udowodnił, że to postępowanie nie daje zawsze palindromu w dwójkowym systemie numeracji; w szczególności dotyczy to liczby binarnej 10110.

W 1977 roku Heiko Harnoth pokazał, że hipoteza jest fałszywa we wszystkich systemach numeracji, których podstawą jest dowolna potęga dwójki. Dla pozostałych podstaw systemu numeracji hipoteza pozostała w tym samym stadium.

Liczba 196 została poddana wyżej opisanemu postępowaniu w 1975 roku przez H.J. Saala z Izraelskiego Centrum Naukowego aż 237310 razy i nie dała palindromu.

Matematykiem, który zajmował się potęgami palindromicznymi, był G.J.Simmons. Istnieje nieskończenie wiele kwadratów, sześcianów i czwartych potęg palindromicznych, ale nie wiadomo, czy istnieją palindromy będące potęgami o wykładnikach większych od czterech.

Najmniejszy kwadrat palindromiczny, którego pierwiastek kwadratowy nie jest palindromem, stanowi liczba $676 = 26^2$.

Największą znaną liczbą niebędącą palindromem, której kwadrat jest palindromem, jest 3069306030693.

Sześciany palindromiczne, których pierwiastki sześcienne nie są palindromami, są spotykane tak rzadko, że jest znany tylko jeden taki sześcian, liczba $10662526601 = 2201^3$.

Nie jest znany żaden palindrom, który byłby n-tą potęgą , n>3, i taki, że jego n-ty pierwiastek sam nie jest palindromem.

Wiele uwagi i badań poświęcono palindromom będącym liczbami pierwszymi. Przypomnijmy, że liczbą pierwszą nazywamy liczbę całkowitą różną od jedynki, która jest podzielna tylko przez jedynkę i samą siebie. Liczby pierwsze - palindromy muszą zaczynać się i kończyć cyframi 1, 3, 7 lub 9 oraz nie mogą mieć parzystej liczby cyfr większych od 2 (w przeciwnym wypadku byłyby one wielokrotnością 11). Praktycznie wszystkie interesujące zagadnienia dotyczące liczb pierwszych - palindromów pozostają dotychczas bez odpowiedzi.

Liczbą pierwszą odwracalną nazywamy liczbę pierwszą niebędącą palindromem, która jest jeszcze liczbą pierwszą gdy czytamy ją od prawej do lewej (np. 17 i 71). Nie wiadomo, czy zbiór liczb pierwszych odwracalnych jest skończony czy nieskończony.

Norman Griedgeman zauważył, że liczby pierwsze - palindromy przedstawiają się często parami liczb identycznych z wyjątkiem cyfr środkowych, których różnica wynosi jeden.

Wśród 47 palindromów, które są liczbami pierwszymi, znajduje się w ten sposób 12 par takich „identycznych" liczb (patrz tabelka).

2	919	13831
3	929	13931
181	10501	15451
191	10601	15551
373	11311	16561
383	11411	16661
787	12721	30103
797	12821	30203

Czy takich par jest nieskończenie wiele? Gridgeman przypuszcza, że odpowiedź na tak postawione pytanie jest pozytywna, ale trzeba to udowodnić.

Rościsław Rabczuk

(Nieco zmieniona wersja artykułu „O liczbach palindromicznych", „Matematyka" nr 5/1994)

Zadania dla Czytelników

1. Ile jest palindromów trzycyfrowych?
2. Ile jest palindromów trzycyfrowych, które są kwadratami liczb całkowitych?
3. Jaka liczba trzycyfrowa po odbiciu w lustrze zmniejszy się 45 razy?
4. Jakie palindromy należy dodać do 1993 aby otrzymane sumy były również palindromami? (zadanie z finału VIII Międzynarodowych Gier Matematycznych w 1993).

Odpowiedzi w następnym numerze.

Matematyka od podstaw

Zadania z rozwiązaniami

W trakcie rozwiązywania pierwszego z zadań zamieszczonych w tym dziale będziemy musieli w pewnym momencie dodać kilka ułamków zwykłych. Warto przypomnieć, jak dodaje się i odejmuje takie ułamki.
Aby móc sprawnie dodawać i odejmować ułamki zwykłe, trzeba umieć znajdować najmniejszą wspólną wielokrotność i największy wspólny dzielnik liczb naturalnych. Aby to umieć, trzeba z kolei wiedzieć, co to są liczby pierwsze, oraz orientować się, jakie liczby naturalne nazywamy dzielnikami innych liczb naturalnych. I żeby wreszcie wiedzieć, co to znaczy, że dana liczba naturalna jest dzielnikiem innej liczby naturalnej, trzeba umieć dzielić z resztą.

Dzielenie z resztą

Liczbę 84 podzielmy z resztą przez 5, a następnie przez 7.

Dzielimy:

16	12
84 : 5	84 : 7
−5	−7
34	14
−30	−14
4 r.	0 r.

Liczba 5 nie jest dzielnikiem 84, gdyż nie mieści się w liczbie 84 całkowitą ilość razy: 5 pomnożone przez 16 daje w wyniku tylko 80 (5·16=80), do 84 brakuje właśnie reszty 4; natomiast 5 pomnożone przez 17 daje w wyniku aż 85 (5·17=85), czyli za dużo. Z kolei liczba 7 jest dzielnikiem 84, gdyż mieści się w liczbie 84 dokładnie 12 razy (7·12=84), czyli, inaczej mówiąc, całkowitą ilość razy.

Dzielniki

Stwierdziliśmy, że liczba 7 jest dzielnikiem 84, gdyż mieści się w 84 całkowitą ilość razy. Poznaliśmy to po tym, że 84 dzieli się przez 7 bez reszty (reszta wynosi 0).

Teraz zajmiemy się innym zagadnieniem: ile wszystkich dzielników ma dana liczba? Na przykład; ile wszystkich dzielników ma liczba 6? 6 dzieli się (niech każdy z Czytelników sprawdzi to osobiście) przez 1 bez reszty, przez 2 bez reszty, przez 3 bez reszty, przez 4 z resztą (reszta wynosi 2), przez 5 z resztą (reszta wynosi 1), przez 6 bez reszty. Zatem liczba 6 ma cztery dzielniki. Oto one:

1, 2, 3 i 6

Teraz stwierdzimy, ile wszystkich dzielników ma liczba 7. 7 dzieli się przez 1 bez reszty, przez 2 z resztą (reszta wynosi 1), przez 3 z resztą (reszta wynosi 1), przez 4 z resztą (reszta wynosi 3), przez 5 z resztą (reszta wynosi 2), przez 6 z resztą (reszta wynosi 1), przez 7 bez reszty. A więc liczba 7 ma dwa dzielniki. Są to 1 i 7

Liczby pierwsze i złożone

Liczby pierwsze to takie liczby, które mają dokładnie dwa dzielniki: dzielą się przez 1 i przez siebie.

Rozpatrywana przed chwilą liczba 7 jest liczbą pierwszą, gdyż ma dokładnie dwa dzielniki: dzieli się przez 1 i przez 7, czyli przez siebie. Inne liczby pierwsze to: 2 (dzieli się przez 1 i przez 2), 3 (dzieli się przez 1 i przez 3), 5 (dzieli się przez 1 i przez 5), 11 (dzieli się przez 1 i przez 11) i tak dalej.

Z kolei liczby złożone to takie, które mają więcej niż dwa dzielniki.

Rozpatrywana wcześniej liczba 6 jest złożona, gdyż ma cztery dzielniki: 1, 2, 3 i 6. Inne liczby złożone to: 4 (jest to najmniejsza liczba złożona; dzieli się przez 1,2 i 4), 8 (dzieli się przez 1, 2, 4 i 8), 9 (dzieli się przez 1, 3 i 9) i tak dalej.

Pozostała jeszcze kwestia liczby 1. Nie jest to ani liczba pierwsza, ani złożona. Ma bowiem tylko jeden dzielnik. Dzielnikiem tym jest 1.

Najmniejsza wspólna wielokrotność i największy wspólny dzielnik

Znajdziemy teraz najmniejszą wspólną wielokrotność oraz największy wspólny dzielnik dla 36 i 60.

Najpierw zajmiemy się najmniejszą wspólną wielokrotnością.

Pierwszą wielokrotnością 36 jest ta sama liczba, gdyż $1 \cdot 36 = 36$; drugą wielokrotnością 36 jest 72, gdyż $2 \cdot 36 = 72$; trzecią wielokrotnością 36 jest 108, gdyż $3 \cdot 36 = 108$.

Kontynuując nasz proces otrzymamy następujący ciąg:

36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396, ...

Jest to ciąg kolejnych wielokrotności liczby 36. Trzy kropki znajdujące się na końcu oznaczają, że jest to ciąg nieskończony.

W podobny sposób otrzymujemy ciąg kolejnych wielokrotności liczby 60. Oto on:

60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, ...

Następnie zestawiamy oba ciągi i szukamy liczb występujących w obu ciągach jednocześnie:

36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396,...
60, 120, 180, 240, 300, 360, 420,..

Widzimy, że w obu ciągach jednocześnie występują dwie liczby: 180 i 360. Gdybyśmy mieli wypisanych liczb więcej (przypominam, że oba ciągi są nieskończone), to okazałoby się, że następnymi liczbami, które występują jednocześnie w obu ciągach, są 540, 720 i tak dalej. Wszystkie te liczby są wielokrotnościami 180 ($360 = 2 \cdot 180$, $540 = 3 \cdot 180$, $720 = 4 \cdot 180$ i tak dalej). Jest ich nieskończenie wiele. Są one wspólnymi wielokrotnościami dla 36 i 60. Najmniejsza liczbę spośród tych wspólnych wielokrotności, chodzi w tym wypadku o liczbę 180, nazywamy najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 36 i 60. Fakt ten zapisujemy krótko w następujący sposób:

NWW (36, 60) = 180

Teraz zajmiemy się największym wspólnym dzielnikiem dla 36 i 60.

Najpierw wypisujemy wszystkie dzielniki 36. Oto one:

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Następnie wypisujemy wszystkie dzielniki 60:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że w przeciwieństwie do zbioru wszystkich wielokrotności danej liczby, który jest zbiorem nieskończonym, zbiór wszystkich dzielników tej liczby jest z kolei zbiorem skończonym.

Teraz zestawiamy oba zbiory wszystkich dzielników liczb 36 i 60 i szukamy liczb występujących w obu zbiorach jednocześnie:

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Widzimy, że w obu zbiorach jednocześnie występuje sześć liczb: 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Są one wspólnymi dzielnikami dla 36 i 60. Największą liczbę spośród tych wspólnych dzielników, chodzi w tym wypadku o liczbę 12, nazywamy największym wspólnym dzielnikiem dla 36 i 60. Fakt ten zapisujemy krótko w następujący sposób:

NWD (36, 60) = 12

Zwróćmy uwagę na to, że zbiór wszystkich wspólnych wielokrotności liczb 36 i 60 jest zbiorem nieskończonym. Jest to zbiór wszystkich wielokrotności liczby 180, będącej najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 36 i 60. Natomiast zbiór wszystkich wspólnych dzielników liczb 36 i 60 jest z kolei zbiorem skończonym. Jest to zbiór wszystkich dzielników liczby 12, będącej największym wspólnym dzielnikiem dla 36 i 60.

Powyższe ustalenia dotyczą nie tylko liczb 36 i 60, lecz dowolnych dwóch liczb naturalnych. Mało tego, dotyczą również dowolnej większej ilości liczb naturalnych.

Zaprezentowany sposób znajdowania najmniejszej wspólnej wielokrotności oraz największego wspólnego dzielnika, mimo bezsprzecznych walorów kształcących, nie jest jednak stosowany. Jest długi, żmudny i pracochłonny, a przy tym w wielu przypadkach praktycznie niewykonalny. Dlatego został opracowany znacznie szybszy sposób znajdowania najmniejszej wspólnej wielokrotności i największego wspólnego dzielnika. Zastosujemy go teraz do znalezienia najmniejszej wspólnej wielokrotności i największego wspólnego dzielnika dla liczb 36 i 60. Jest to sposób krótki. Żeby jednak móc go dokładnie objaśnić, musi zostać podzielony na etapy. Z tego powodu niektórym Czytelnikom może wydawać się nieco za długi. Będzie to jednak mylne wrażenie.

Zaczynamy.

36	60	
18	30	2

36 i 60 dzielimy przez liczby pierwsze, począwszy od możliwie jak najmniejszych, przez które dzieli się chociaż jedna z tych dwóch liczb. 2 jest najmniejszą liczbą pierwszą. Dzieli się przez nią 36 i 60. Po podzieleniu obu liczb przez 2 otrzymujemy dwie nowe liczby: 18 i 30 Zapisujemy to krótko w postaci odpowiedniej tabelki:

36	60	
18	30	2
9	15	2

Teraz z kolei postępujemy tak samo z liczbami 18 i 30; to znaczy szukamy możliwie jak najmniejszych liczb pierwszych, przez które dzieli się choć jedna z tych liczb. Taką liczbą jest znowu 2. Dzieli się przez nią 18 i 30. Po podzieleniu obu liczb przez 2 otrzymujemy dwie nowe liczby: 9 i 15. Zapisujemy to w tabelce:

36	60	
18	30	2
9	15	2
3	5	3

Następnie powtarzamy nasze postępowanie w odniesieniu do liczb 9 i 15. Przez 2 nie dzieli się żadna z nich. Bierzemy więc pod uwagę następną w kolejności liczbę pierwszą, czyli 3. Okazuje się, że obie rozpatrywane liczby dzielą się przez 3. Po podzieleniu ich przez 3 otrzymujemy dwie nowe liczby: 3 i 5. Wpisujemy je do naszej tabelki:

Po raz czwarty powtarzamy nasze postępowanie. Teraz w stosunku do liczb 3 i 5. Przez liczbę pierwszą 3 dzieli się tylko jedna z rozpatrywanych liczb, jest nią liczba 3. Dzielimy więc ją przez 3, a liczbę 5 pozostawiamy bez zmian. W tabelce naszej zapisujemy to w taki sposób (jest to bardzo ważne!), że pod liczbą 3 piszemy wynik z podzielenia jej przez 3, czyli liczbę 1; natomiast pod liczbą 5, którą pozostawiliśmy bez zmian, wstawiamy kreskę (jak obok w tabelce).

36	60	
18	30	2
9	15	2
3	5	3
1	–	3

Jedynka znajdująca się u dołu kolumny, której początkową liczbą jest 36, oznacza, że postępowanie nasze wobec tej kolumny zostało zakończone i nic już więcej nie należy w niej dopisywać. Od tego momentu nie zajmujemy się już tą kolumną.

36	60	
18	30	2
9	15	2
3	5	3
1	–	3
	1	5

Pozostała nam więc już tylko liczba 5 będąca w kolumnie zaczynającej się liczbą 60. Możliwie jak najmniejszą liczbą pierwszą, przez którą dzieli się 5, jest oczywiście liczba pierwsza 5. Po podzieleniu otrzymujemy w wyniku iloraz równy 1. Wstawiamy go w naszej tabelce w kolumnie, pod kreską (patrz obok).

Ponieważ w obu kolumnach pojawiły się jedynki, zatem proces tworzenia tabelki zakończył się.

Mogłoby wydawać się, że budowanie takiej tabelki jest długie i pracochłonne. Wrażenie takie jest rezultatem tego, że tabelkę tworzyliśmy etapami, szeroko przy tym komentując nasze postępowanie. Normalnie taką tabelkę tworzy się bardzo szybko wykonując większość obliczeń w pamięci.

Gdy tabelka zostanie już zbudowana, obliczenie najmniejszej wspólnej wielokrotności oraz największego wspólnego dzielnika jest bardzo proste. Aby bowiem otrzymać najmniejszą wspólną wielokrotność, wystarczy pomnożyć wszystkie liczby pierwsze znajdujące się w tabelce na prawo od pionowej kreski. W naszym konkretnym przypadku najmniejszą wspólną wielokrotność dla 36 i 60 obliczamy następująco:

NWW (36, 60)=2·2·3·3·5=180.

Równie łatwo obliczamy największy wspólny dzielnik. Aby go otrzymać, wystarczy pomnożyć te liczby pierwsze będące w tabelce na prawo od pionowej kreski, obok których z lewej strony tej samej pionowej kreski znajdują się dwie liczby. Żeby nie pomylić się, najlepiej oznaczyć gwiazdkami te liczby pierwsze, które należy pomnożyć. Po zrobieniu tego, w przypadku obliczania największego wspólnego dzielnika dla 36 i 60, tabelka nasza wygląda tak, jak widać to obok.

36	60	
18	30	2*
9	15	2*
3	5	3*
1	–	3
	1	5

Teraz, aby znaleźć największy wspólny dzielnik dla 36 i 60, wystarczy już tylko pomnożyć zaznaczone liczby pierwsze. Otrzymujemy wówczas:

NWD (36, 60)=2·2·3=12.

Podobnie łatwo znajdujemy najmniejszą wspólną wielokrotność oraz największy wspólny dzielnik dla większej ilości liczb naturalnych.

Dla przykładu znajdziemy teraz najmniejszą wspólną wielokrotność i największy wspólny dzielnik dla pięciu liczb: 30, 45, 60, 90 i 105. Nie będziemy szczegółowo opisywać, jak należy budować tabelkę, gdyż w przypadku większej ilości liczb naturalnych robi się to tak samo, jak przy dwóch liczbach.

Naszą piątkę liczb zaczynamy dzielić przez kolejne liczby pierwsze, począwszy od możliwie jak najmniejszych liczb pierwszych, przez które dzieli się chociaż jedna z tych pięciu liczb. Zawsze dzielimy tylko te liczby, które dadzą się podzielić bez reszty, pozostałe pozostawiamy bez zmian. W przypadku, gdy jakąś liczbę pozostawiamy bez zmian, to zaznaczamy to w sporządzanej tabelce za pomocą poziomek kreseczki. Najlepiej wszystko to wyjaśni tabelka obok.

30	45	60	90	105	
15	–	30	45	–	2
–	–	15	–	–	2
5	15	5	15	35	3*
–	5	–	5	–	3
1	1	1	1	7	5*
				1	7

Chcąc obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność dla 30, 45, 60, 90 i 105 wystarczy pomnożyć liczby pierwsze znajdujące się na prawo od pionowej linii.

Obliczamy:

NWW (30, 45, 60, 90, 105)=2·2·3·3·5·7=1260.

Aby zaś z kolei obliczyć największy wspólny dzielnik dla interesujących nas pięciu liczb, trzeba jedynie pomnożyć te liczby pierwsze będące na prawo od pionowej linii, obok których z lewej strony tej samej pionowej linii znajduje się pięć liczb (po jednej z każdej kolumny). Liczby pierwsze, których iloczyn daje nam największy wspólny dzielnik dla 30, 45, 60, 90 i 105, zaznaczyliśmy krzyżykami. Obliczamy:

NWD (30, 45, 60, 90, 105)=3·5=15.

Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych

90	126	
45	63	2
15	21	3
5	7	3
1	–	5
	1	7

Najpierw wykonamy odejmowanie: $\frac{73}{90}-\frac{23}{126}$

Na początku należy oba ułamki sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika gdyż gwarantuje to najprostsze obliczenia. Najmniejszym wspólnym mianownikiem jest liczba będąca najmniejszą wspólną wielokrotnością dla obu mianowników. Aby ją znaleźć, sporządzamy tabelkę (patrz obok).

Następnie znajdujemy najmniejszą wspólną wielokrotność dla 90 i 126.

NWW (90, 126)=2·3·3·5·7=630

Teraz sprowadzamy oba ułamki do wspólnego mianownika, którym jest liczba 630. Robi się to bardzo prosto. Najpierw zamieniamy ułamek $\frac{73}{90}$ na ułamek równy mu, ale o mianowniku 630, czyli wykonujemy następujące zadanie: znajdź taki licznik, aby zachodziła następująca równość: $\frac{73}{90}=\frac{?}{630}$

Wiadomo, że wartość ułamka nie ulega zmianie, jeśli jego licznik i mianownik pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera. Zastanówmy się, przez jaką liczbę należy pomnożyć mianownik 90 aby otrzymać 630. Jest to oczywiście 7 bo 630:90=7.

Skoro wartość ułamka $\frac{73}{90}$ ma zostać niezmieniona po pomnożeniu jego mianownika przez 7, to licznik również musi zostać pomnożony przez 7. Po wykonaniu tej operacji, czyli po rozszerzeniu ułamka $\frac{73}{90}$ przez 7 otrzymujemy $\frac{511}{630}$.

Zatem $\frac{73}{90}=\frac{511}{630}$

Do tego wyniku można również dojść inną metodą. Mianownik nowego, rozszerzonego ułamka, dzielimy przez mianownik starego a otrzymany wynik mnożymy przez licznik starego ułamka:

(630:90)·73=7·73=511.

Tak samo postępujemy z ułamkiem $\frac{23}{126}$ przy zamienianiu go na ułamek o mianowniku 630:

(630:126)·23=5·23=115.

Zatem $\frac{23}{126}=\frac{115}{630}$

Teraz możemy przystąpić do odejmowania: $\frac{73}{90}-\frac{23}{126}=\frac{511}{630}-\frac{115}{630}=\frac{511-115}{630}=\frac{396}{630}$

Pozostało nam już tylko doprowadzić ułamek $\frac{396}{630}$ do postaci nieskracalnej. Możemy postąpić dwojako: albo podzielić licznik i mianownik ułamka przez ich największy wspólny dzielnik, albo skrócić ułamek rozkładając przedtem jego licznik i mianownik na czynniki pierwsze. Zastosujemy najpierw pierwszą metodę. W tym celu szukamy największego wspólnego dzielnika dla licznika i mianownika tworząc tabelkę.

396	630	
198	315	2
99	–	2
33	105	3
11	35	3
–	7	5
–	1	7
1		11

NWD (396, 630)=2·3·3=18

Teraz skracamy ułamek $\frac{396}{630}$ przez 18:

$$\frac{396}{630}=\frac{396:18}{630:18}=\frac{22}{35}$$

A jak doprowadzić ułamek do postaci nieskracalnej poprzez rozkład jego licznika i mianownika na czynniki pierwsze?

Trzeba przedtem przypomnieć co to znaczy rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze. Znaczy to, że trzeba ją przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. A jak znaleźć taki rozkład?

Dla przykładu rozłóżmy na czynniki pierwsze liczbę 396.

396 dzielimy przez możliwie najmniejszą liczbę pierwszą, przez którą da się podzielić bez reszty. Taką liczbą jest 2. Po podzieleniu 396 przez 2 otrzymujemy 198. Tak samo postępujemy z tą liczbą. Szukamy jak najmniejszej liczby pierwszej, przez którą 198 da się podzielić bez reszty. Taką liczbą jest znowu 2. Po podzieleniu 198 przez 2 otrzymujemy 99. Teraz szukamy możliwie najmniejszej liczby pierwszej, przez którą 99 dzieli się bez reszty. 2 już taką liczbą nie jest. Jest nią natomiast następna liczba pierwsza czyli 3. Po podzieleniu 99 przez 3 otrzymujemy 33. Tak samo postępujemy z liczbą 33. Znowu 3 jest najmniejszą liczbą pierwszą, przez którą dzieli się 33. Po podzieleniu 33 przez 3 otrzymujemy 11. Liczba 11 nie dzieli się bez reszty ani przez 3, ani przez żadną z dwóch kolejnych liczb pierwszych 5 i 7. Dzieli się bez reszty dopiero przez liczbę pierwszą 11 czyli przez samą siebie. Po podzieleniu 11 przez 11 otrzymujemy 1. Świadczy to, że postępowanie, którego celem było rozłożenie liczby 396 na czynniki pierwsze, zakończyło się.

Rozkład liczb na czynniki pierwsze można przedstawić w postaci tabelki. Pokażmy, jak będzie to wyglądać w przypadku liczb 396 i 630.

396	2	630	2
198	2	315	3
99	3	105	3
33	3	35	5
11	11	7	7
1		1	

Zatem 396=2·2·3·3·11 oraz 630=2·3·3·5·7.

Dalsze postępowanie przy skracaniu ułamka $\frac{396}{630}$ jest bardzo proste: $\frac{396}{630}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 5\cdot 7}=\frac{22}{35}$

Wystarczy zastąpić licznik i mianownik ułamka $\frac{396}{630}$ odpowiednimi iloczynami liczb pierwszych a następnie skreślić te czynniki, które występują jednocześnie w obu iloczynach. Na zakończenie trzeba jeszcze tylko pomnożyć czynniki nieskreślone i wynik gotowy.

Rezultat naszych dotychczasowych rozważań zapisujemy krótko:

$$\frac{73}{90}-\frac{23}{126}=\frac{22}{35}$$

Może wydawać się, że rozwiązanie było długie. Nie było to jednak samo rozwiązanie,

lecz rozwiązanie opatrzone szczegółowym komentarzem. Teraz na przykładzie dodawania kilku ułamków zapoznamy się z rozwiązaniem pozbawionym komentarza.

Dodaj ułamki zwykłe:

$$\frac{2}{9}+\frac{1}{12}+\frac{9}{14}+\frac{4}{21}$$

9	12	14	21	
–	6	7	–	2
–	3	–	–	2
3	1	–	7	3
1		–	–	3
		1	1	7

Rozwiązujemy nie komentując.

$$NWW(9, 12, 14, 21)=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7=252$$

$$\frac{2}{9}=\frac{56}{252};\ \frac{1}{12}=\frac{21}{252};\ \frac{9}{14}=\frac{162}{252};\ \frac{4}{21}=\frac{48}{252}$$

$$\frac{2}{9}+\frac{1}{12}+\frac{9}{14}+\frac{4}{21}=\frac{56}{252}+\frac{21}{252}+\frac{162}{252}+\frac{48}{252}=\frac{56+21+162+48}{252}=\frac{287}{252}$$

287	252	
–	126	2
–	63	2
–	21	3
–	7	3
41	1	7
1		41

Przystępujemy do skracania. Licznik i mianownik ułamka $\frac{287}{252}$ dzielimy przez największy wspólny dzielnik.

NWD (287, 252)=7

$$\frac{287}{252}=\frac{287:7}{252:7}=\frac{41}{36}$$

Teraz skracamy drugim sposobem poprzez rozkład licznika i mianownika na czynniki pierwsze.

287	7
41	41
1	

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$\frac{287}{252}=\frac{\cancel{7}\cdot41}{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot\cancel{7}}=\frac{41}{36}$$

Zadanie 1

Żołędzie dla zoo

Agatka, Basia, Kazik, Marcin, Piotrek i Zuzia przynieśli do zoo zebrane przez siebie żołędzie. Dostały za nie łącznie 30 zł i 90 gr. Jedno z dzieci otrzymało pewną kwotę, drugie połowę tej kwoty i 10 gr, trzecie trzecią część tej kwoty i 20 gr, czwarte czwartą część tej kwoty i 30 gr, piąte piątą część tej kwoty i 40 gr, szóste szóstą część tej kwoty i 50 gr. Agatka i Marcin dostali razem tyle pieniędzy ile Basia. Piotrek, Marcin i Zuzia otrzymali razem 10 zł. Ile pieniędzy dostało każde z dzieci, jeśli wiadomo, że najmniej dostała jedna z dziewczynek?

Rozwiązanie

Wszystkie kwoty występujące w tekście rozwiązania będą podawane w złotych, np. 10 gr to 0,1 zł, 30 zł 90 gr to 30,9 zł itd.

Przez x oznaczamy kwotę, którą otrzymało pierwsze z dzieci. Drugie z dzieci dostało połowę tej kwoty i 0,1 zł, czyli $\frac{1}{2}x+0{,}1$ zł. Trzecie dziecko dostało trzecią część tej kwoty i 0,2 zł, czyli $\frac{1}{3}x+0{,}2$ zł. Czwarte dziecko dostało czwartą część tej kwoty

i 0,3 zł, czyli $\frac{1}{4}x+0{,}3$ zł. Piąte dziecko dostało piątą część tej kwoty i 0,4 zł, czyli $\frac{1}{5}x+0{,}4$ zł. Szóste zaś dziecko dostało szóstą część tej kwoty i 0,5 zł, czyli $\frac{1}{6}x+0{,}5$ zł.

Dodajemy wszystkie kwoty otrzymane przez dzieci.

$$x+\left(\frac{1}{2}x+0{,}1\right)+\left(\frac{1}{3}x+0{,}2\right)+\left(\frac{1}{4}x+0{,}3\right)+\left(\frac{1}{5}x+0{,}4\right)+\left(\frac{1}{6}x+0{,}5\right)$$

Ponieważ wiemy, że dzieci dostały razem 30,9 zł możemy napisać równanie:

$$x+\left(\frac{1}{2}x+0{,}1\right)+\left(\frac{1}{3}x+0{,}2\right)+\left(\frac{1}{4}x+0{,}3\right)+\left(\frac{1}{5}x+0{,}4\right)+\left(\frac{1}{6}x+0{,}5\right)=30{,}9$$

Rozwiązywanie tego równania rozpoczynamy od przekształcenia jego lewej strony. Ponieważ dodawanie jest działaniem łącznym, możemy w dowolny sposób grupować składniki, co znajduje widoczny wyraz w ujmowaniu ich w dowolnie rozstawiane nawiasy. Możemy też oczywiście postąpić odwrotnie, to znaczy zlikwidować nawiasy, co nazywa się w matematyce otwieraniem nawiasów.

Mamy zatem: $x+\frac{1}{2}x+0{,}1+\frac{1}{3}x+0{,}2+\frac{1}{4}x+0{,}3+\frac{1}{5}x+0{,}4+\frac{1}{6}x+0{,}5=30{,}9$

Następnie korzystamy z przemienności dodawania i zmieniamy kolejność składników z lewej strony równania.

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x+0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}4+0{,}5=30{,}9$$

Ponownie korzystając z łączności dodawania grupujemy składniki jak następuje:

$$\left(x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x\right)+(0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}4+0{,}5)=30{,}9$$

Zauważmy, że w przypadku wyrażenia z pierwszego nawiasu możemy wyłączyć wspólny czynnik x poza nawias otrzymując w ten sposób równanie:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)x+(0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}4+0{,}5)=30{,}9$$

Dokonując powyższego przekształcenia korzystaliśmy z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania (oczywiście w postaci rozszerzonej).

Obliczamy teraz wartość sum znajdujących się w obu nawiasach.

Otrzymujemy $\frac{147}{60}x+1{,}5=30{,}9$

Teraz zamieniamy ułamek zwykły $\frac{147}{60}$ na ułamek dziesiętny: $\frac{147}{60}=2{,}45$

Nasze ostatnie równanie możemy zapisać tak: $2{,}45x+1{,}5=30{,}9$

Dalej rozwiązujemy je bez trudu: $2{,}45x=30{,}9-1{,}5$

$$2{,}45x=29{,}4$$
$$x=29{,}4:2{,}45$$
$$x=12$$

Pierwsze z sześciorga dzieci dostało więc 12 zł. Drugie z dzieci uzyskało połowę tej kwoty i 0,1 zł, czyli $\frac{1}{2}\cdot12+0{,}1=6+0{,}1=6{,}1$ zł.

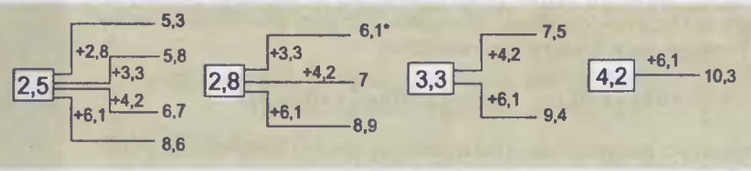
Trzecie dziecko dostało $\frac{1}{3}\cdot12+0{,}2=4+0{,}2=4{,}2$ zł, czwarte $\frac{1}{4}\cdot12+0{,}3=3+0{,}3=3{,}3$ zł, piąte $\frac{1}{5}\cdot12+0{,}4=2{,}4+0{,}4=2{,}8$ zł, zaś szóste

$\frac{1}{6} \cdot 12 + 0{,}5 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$ zł. Obliczamy, ile otrzymały wszystkie dzieci razem:

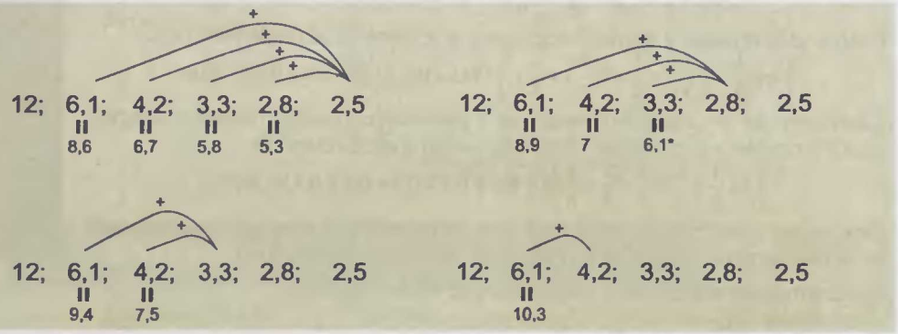
$$12 + 6{,}1 + 4{,}2 + 3{,}3 + 2{,}8 + 2{,}5 = 30{,}9$$

Wynik ten jest zgodny z tekstem zadania. Ustaliliśmy, że dzieci otrzymały sześć kwot: **12; 6,1; 4,2; 3,3; 2,8; 2,5**. Wiemy, że Marcin z Agatką dostali razem tyle pieniędzy ile Basia. Żeby ustalić, jaką kwotę otrzymało każde z dzieci, musimy znaleźć w zbiorze tych sześciu liczb dwie takie, których suma daje trzecią liczbę należącą również do tego zbioru.

Możemy szukać takich liczb na „chybił-trafił". Sposób ten jest jednak męczący a jego wynik niepewny. Znacznie wygodniej jest systematycznie prowadzić poszukiwania uwzględniając przy tym wszystkie przypadki, których wynik może dać pozytywny rezultat. Trudno podać jakąś konkretną receptę na metodę poszukiwań. Zależy to od pomysłowości i doświadczenia rozwiązującego. Niżej widzimy jedną z takich recept.



(dlaczego nie dodawaliśmy pierwszej, największej liczby?)



Można oczywiście podać inną receptę, która da taki sam wynik. Widzimy ją niżej:

Przypadek, który dał pozytywny rezultat, zaznaczyliśmy gwiazdką (w obu metodach). Oto on: $2{,}8 + 3{,}3 = 6{,}1$

Zatem Basia otrzymała 6,1 zł, natomiast Marcin i Agatka dostali 2,8 i 3,3 zł. Nie wiemy jednak, czy Marcin otrzymał 2,8 zł a Agatka 3,3 zł, czy odwrotnie. W rozstrzygnięciu tego dylematu pomoże nam informacja, że Piotrek, Marcin i Zuzia otrzymali razem 10 zł.

W zbiorze sześciu liczb: 12; 6,1; 4,2; 3,3; 2,8 i 2,5 szukamy więc takich trzech, których suma wynosi 10. Musimy teraz wymyślić jakąś metodę, dzięki której będziemy mogli łatwo znaleźć te trzy liczby.

Zastanówmy się, czy jedną z trzech poszukiwanych liczb może być 12. Z całą pewnością nie, bo jeśli jeden ze składników jest większy od 10, to na pewno suma trzech składników będzie również większa od 10.

A czy jedną z trzech poszukiwanych liczb może być 6,1? Także nie. Jeśli jednym z trzech składników jest 6,1, to gdyby nawet dwoma pozostałymi składnikami były liczby możliwie najmniejsze z naszego zbioru sześciu liczb, czyli 2,5 oraz 2,8 , to suma tak wybranych trzech składników przekroczy 10.

Wynika z tego, że wśród trzech poszukiwanych przez nas liczb nie może być ani 12, ani 6,1. Do rozpatrzenia pozostały nam zatem tylko cztery liczby: 4,2; 3,3; 2,8; 2,5. Teraz już łatwo znajdziemy wśród nich trzy liczby, których suma wynosi 10. Wystarczy w tym celu rozważyć cztery przypadki. Każdy z nich polega na skreśleniu jednej liczby spośród czterech i dodaniu trzech pozostałych.

Przypadek, w którym otrzymaliśmy interesujący nas rezultat, oznaczyliśmy gwiazdką.

Zatem Piotrek, Marcin i Zuzia dostali następujące kwoty: 4,2 zł, 3,3 zł oraz 2,5 zł. Nie wiemy jednak, które z nich otrzymało jaką kwotę. W rozwiązaniu tego problemu pomoże nam poprzednio uzyskana informacja, że Marcin i Agatka dostali 2,8 oraz 3,3 zł. Wtedy również nie wiedzieliśmy, które z nich otrzymało jaką kwotę. Teraz wiemy. Skąd? Proszę zauważyć, że tylko jedna kwota występuje jednocześnie w obu zbiorach kwot. Chodzi o 3,3 zł. Również wśród imion tylko jedno powtarza się dwukrotnie. Tym imieniem jest Marcin. Zatem kwotę 3,3 musiał otrzymać właśnie Marcin. W takim razie 2,8 zł dostała Agatka. Nie potrafimy jeszcze tylko powiedzieć, czy 4,2 zł otrzymał Piotrek a 2,5 zł Zuzia, czy odwrotnie. W ustaleniu tego pomoże nam informacja zawarta w pytaniu, że najmniej pieniędzy dostała jedna z dziewczynek. Zatem 2,5 zł – jako najmniejszą kwotę – musiała otrzymać Zuzia. W takim razie 4,2 zł dostał Piotrek.

~~4,2~~ 3,3 2,8 2,5
4,2 ~~3,3~~ 2,8 2,5
4,2 3,3 ~~2,8~~ 2,5
4,2 3,3 2,8 ~~2,5~~

$3{,}3 + 2{,}8 + 2{,}5 = 8{,}6$
$4{,}2 + 2{,}8 + 2{,}5 = 9{,}5$
$4{,}2 + 3{,}3 + 2{,}5 = 10^*$
$4{,}2 + 3{,}3 + 2{,}8 = 10{,}3$

Stwierdziliśmy zatem, że 6,1 zł otrzymała Basia, 3,3 zł Marcin, 2,8 zł Agatka, 2,5 zł Zuzia a 4,2 zł Piotrek.

Pozostała tylko jedna kwota – 12 zł i jedno imię – Kazik. Zatem on właśnie otrzymał 12 zł.

Odpowiedź: Kazik otrzymał 12 zł, Basia 6 zł 10 gr, Piotrek 4 zł 20 gr, Marcin 3 zł 30 gr, Agatka 2 zł 80 gr a Zuzia 2 zł 50 gr.

Zadanie 2

Owocowe zakupy, czyli procenty, procenty, procenty ...

Pan Szczukiewicz dał swoim czterem córkom 15 zł na kupno owoców. Ani przypadło 25% pieniędzy, które otrzymały razem Marta, Dorota i Ola; Marcie – 50% pieniędzy, które otrzymały razem Dorota i Ola; Dorocie – 60% pieniędzy, które otrzymała Ola.

Ania za 35% kwoty, którą dostała od ojca, kupiła 70 dag jabłek, Marta za 90% otrzymanej kwoty kupiła 75 dag pomarańczy; Dorota za 45% otrzymanej kwoty kupiła pół kg czereśni; Ola za 55% otrzymanej kwoty kupiła 1 kg 10 dag śliwek.

Jaka była cena kilograma jabłek, jaka pomarańczy, jaka czereśni a jaka śliwek?

Rozwiązanie

W trakcie rozwiązywania zadania wszystkie wagi będą podawane w kilogramach (np. 1 kg 10 dag jako 1,1 kg, 75 dag jako 0,75 kg) a kwoty w złotych.

Najpierw obliczymy, ile pieniędzy otrzymała każda z dziewcząt. Oznaczamy przez x kwotę, jaką otrzymała Ola (umiejętność trafnego doboru niewiadomej przychodzi z doświadczeniem; dzięki przyjęciu za niewiadomą kwoty, jaką dostała Ola, otrzymamy tylko jedno równanie z jedną niewiadomą a nie układ czterech równań z czterema niewiadomymi). Z tekstu zadania wiemy, że kwota, którą otrzymała Dorota, była równa 60% kwoty otrzymanej przez Olę.

Ponieważ wysokość kwoty otrzymanej przez Olę oznaczyliśmy przez x, zatem Dorota dostała od ojca $\frac{60}{100}x$ złotych. Jeśli Ola otrzymała x złotych a Dorota $\frac{60}{100}x$ zł,

to obie dziewczynki dostały razem $x+\frac{60}{100}x$ złotych. Z tekstu zadania wiemy, że kwota otrzymana przez Martę była równa 50% tego, co otrzymały razem Ola i Dorota. Zatem Marta dostała od ojca $\frac{50}{100}\left(x+\frac{60}{100}x\right)$ złotych. A więc trzy wymienione dotąd dziewczynki otrzymały łącznie $x+\frac{60}{100}x+\frac{50}{100}\left(x+\frac{60}{100}x\right)$ złotych. Z treści zadania wiemy, że Ania dostała kwotę równą 25% tego, co dostały łącznie Ola, Dorota i Marta. Zatem Ania otrzymała $\frac{25}{100}\left(x+\frac{60}{100}x+\frac{50}{100}\left(x+\frac{60}{100}x\right)\right)$ złotych. Z tego wniosek, że wszystkie cztery siostry otrzymały razem $x+\frac{60}{100}x+\frac{50}{100}\left(x+\frac{60}{100}x\right)+\frac{25}{100}\left(x+\frac{60}{100}x+\frac{50}{100}\left(x+\frac{60}{100}x\right)\right)$ złotych. Z treści zadania wiemy też, pan Szczukiewicz dał córkom 15 złotych.

Możemy zatem napisać:

$$x+\frac{60}{100}x+\frac{50}{100}\left(x+\frac{60}{100}x\right)+\frac{25}{100}\left(x+\frac{60}{100}x+\frac{50}{100}\left(x+\frac{60}{100}x\right)\right)=15$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie. Przedtem jednak sprowadzamy do postaci nieskracalnej wszystkie występujące w nim ułamki. Otrzymujemy:

$$x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{5}x\right)+\frac{1}{4}\left(x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{5}x\right)\right)=15$$

Następnie otwieramy nawiasy – najpierw ten, który znajduje się wewnątrz drugiego. Otrzymujemy:

$$x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{5}x\right)+\frac{1}{4}\left(x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{10}x\right)=15$$

Teraz otwieramy pozostałe nawiasy, otrzymując równanie:

$$x+\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{10}x+\frac{1}{4}x+\frac{3}{20}x+\frac{1}{8}x+\frac{3}{40}x=15$$

Wyłączamy wspólny czynnik x poza nawias i otrzymujemy:

$$\left(1+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}+\frac{3}{20}+\frac{1}{8}+\frac{3}{40}\right)x=15$$

Teraz dodajemy ułamki w nawiasie sprowadzając je najpierw do wspólnego mianownika, a następnie dodajemy liczniki. Otrzymujemy:

$$\frac{40+24+20+12+10+6+5+3}{40}x=15,$$

skąd

$$\frac{120}{40}x=15.$$

Dalsze przekształcenia nie powinny sprawić żadnej trudności:

$$3x=15$$
$$x=15:3$$
$$x=5$$

Zatem Ola otrzymała od ojca 5 zł. Kwota otrzymana przez Dorotę była równa 60% tego, co dostała Ola, czyli $\frac{60}{100}\cdot 5=3$ złote. W takim razie obie dziewczynki dostały łącznie 8 zł. Z treści zadania wiemy, że kwota otrzymana przez Martę wynosiła 50% tego, co dostały razem Ola i Dorota. Zatem Marta otrzymała $\frac{50}{100}\cdot 8=4$ złote. Z tego

wniosek, że Ola, Dorota i Marta dostały łącznie 12 złotych. Wiemy, że kwota otrzymana przez Anię wynosiła 25% tego, co dostały razem Ola, Dorota i Marta. Zatem Ania dostała od ojca $\frac{25}{100}\cdot 12=3$ złote. Sprawdźmy, czy wszystkie siostry otrzymały łącznie 15 zł. Dodajemy $3+4+3+5=15$.

Ustalimy teraz, ile pieniędzy Ania wydała na jabłka, Marta na pomarańcze, Dorota na czereśnie a Ola na śliwki.

Z tekstu zadania wiemy, że Ania wydała na jabłka 35% otrzymanych pieniędzy. Oznacza to, że zapłaciła za nie $\frac{35}{100}\cdot 3=1{,}05$ zł. Marta 90% otrzymanych pieniędzy wydała na pomarańcze, co oznacza, że zapłaciła $\frac{90}{100}\cdot 4=3{,}6$ zł. Natomiast Dorota kupiła czereśnie za 45% otrzymanych pieniędzy, co oznacza, że wydała na nie $\frac{45}{100}\cdot 3=1{,}35$ zł. Wreszcie Ola kupiła śliwki za 55% otrzymanych pieniędzy, czyli zapłaciła za nie $\frac{55}{100}\cdot 5=2{,}75$ zł.

Ustalimy teraz jaka była cena poszczególnych owoców. Wiadomo, że wartość towaru jest iloczynem jego ceny i wagi. Znając wartość towaru i jego wagę, z łatwością obliczymy więc jego cenę. Skoro Ania za 0,7 kg jabłek zapłaciła 1,05 zł, to jeden kilogram kosztował $1{,}05:0{,}7=1{,}5$ złotego. Tak samo obliczamy ceny pozostałych owoców – pomarańczy: $3{,}6:0{,}75=4{,}8$; czereśni: $1{,}35:0{,}5=2{,}7$ i śliwek: $2{,}75:1{,}1=2{,}5$.

Rozwiązanie następnego zadania daje okazję do zapoznania się z mało znaną metodą pozwalającą łatwo rozwiązywać pewien typ zadań tekstowych, w których mowa jest o wieku dwóch lub więcej osób.

Zadanie 3

Ile lat...?

Karolina i Marta są siostrami. Gdy Marta miała tyle lat, ile Karolina 7 lat temu, to była wtedy od Karoliny dwa razy starsza. Za trzy lata obie siostry będą miały razem 30 lat. Ile lat ma obecnie Karolina a ile Marta?

Rozwiązanie

Abyśmy mogli łatwiej ułożyć prawidłowe równanie, sytuację opisaną w zadaniu przedstawimy za pomocą tabelki. Dzięki niej będzie nam łatwiej przetłumaczyć tekst zadania na język algebry, to znaczy zapisać go za pomocą odpowiednich wyrażeń algebraicznych a następnie ułożyć stosowne równanie.

		Gdy Marta miała tyle lat, ile Karolina 7 lat temu	7 lat temu	Obecnie	Za 3 lata
		1	2	3	4
Marta	1	$x-7$			$30-(x+3)$
Karolina	2	$\frac{1}{2}(x-7)$	$x-7$	x	$x+3$

Przez x oznaczamy wiek Karoliny w chwili obecnej. Niewiadomą x wstawiamy w tabeli do kratki na przecięciu drugiej rubryki poziomej i trzeciej pionowej. Jeśli obecnie Karolina ma x lat, to 7 lat temu miała $x-7$ lat. Wyrażenie $x-7$ wpisujemy do kratki na przecięciu drugiej rubryki pionowej oraz drugiej poziomej. Gdy Marta miała tyle lat, ile Karolina 7 lat temu, czyli gdy miała $x-7$ lat, była od Karoliny dwa razy starsza. Z tego wniosek, że Karolina miała wówczas $\frac{1}{2}(x-7)$ lat. Wyrażenie $x-7$ wstawiamy do kratki na przecięciu pierwszej rubryki poziomej i pierwszej pionowej, natomiast wyrażenie $\frac{1}{2}(x-7)$ wpisujemy na przecięciu drugiej rubryki poziomej i pierwszej pionowej. Skoro obecnie Karolina ma x lat, to za 3 lata będzie miała $x+3$ lata. Wyrażenie $x+3$ wstawiamy na przecięciu drugiej rubryki poziomej i czwartej pionowej. Z tekstu zadania wiemy, że za 3 lata obie siostry będą miały łącznie 30 lat. Jeśli zatem Karolina za 3 lata będzie miała $x+3$ lata, to Marta będzie miała $30-(x+3)$ lat. Wyrażenie $30-(x+3)$ wpisujemy na przecięciu pierwszej rubryki poziomej i czwartej pionowej. Mamy już wszystko, co jest potrzebne do ułożenia odpowiedniego równania. Nie musimy już więc wypełniać dwóch pozostałych kratek.

Przystępujemy do układania równania. Odejmując od wyrażenia $x-7$ wyrażenie $\frac{1}{2}(x-7)$ otrzymujemy wyrażenie $(x-7)-\frac{1}{2}(x-7)$, które przedstawia różnicę wieku pomiędzy Martą i Karoliną, gdy Marta miała tyle lat, ile Karolina 7 lat temu. Natomiast odejmując od wyrażenia $30-(x+3)$ wyrażenie $x+3$ otrzymujemy wyrażenie $(30-(x+3))-(x+3)$, które z kolei przedstawia różnicę wieku, jaka będzie między Martą a Karoliną za 3 lata. Teraz skorzystamy z warunku, który nie został wymieniony w tekście zadania, gdyż jest dla każdego oczywisty: że różnica wieku dwóch osób jest zawsze taka sama. Wynika z tego warunku, że dla x oznaczającego wiek Karoliny w chwili obecnej (przypomnijmy sobie, co oznaczyliśmy przez x) wartości obu wyrażeń $(x-7)-\frac{1}{2}(x-7)$ oraz $(30-(x+3))-(x+3)$, są równe. Chcąc dowiedzieć się ile lat ma Karolina w chwili obecnej, czyli dla jakiego x wartości podanych przed chwilą wyrażeń są równe, wystarczy rozwiązać następujące równanie:

$$(x-7)-\frac{1}{2}(x-7)=(30-(x+3))-(x+3)$$

Jest to równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Rozwiązujemy je w doskonale znany nam sposób. Najpierw otwieramy nawias znajdujący się wewnątrz innego nawiasu. Otrzymujemy:

$$(x-7)-\frac{1}{2}(x-7)=(30-x-3)-(x+3)$$

Następnie otwieramy wszystkie pozostałe nawiasy, w wyniku czego otrzymujemy:

$$x-7-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}=30-x-3-x-3$$

Teraz dokonujemy redukcji wyrazów podobnych w obu wyrażeniach stojących po prawej i lewej stronie równania. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}=24-2x$$

Następnie przekształcamy równanie w taki sposób, aby wszystkie wyrazy zawierające niewiadomą x znalazły się po jednej stronie znaku równości a wyrazy wolne po drugiej stronie (pamiętamy o zmianie znaku na przeciwny). Otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{2}x+2x=24+3\frac{1}{2}$$

Po kolejnej redukcji wyrazów podobnych mamy

$$2\frac{1}{2}x=27\frac{1}{2},$$

skąd $x=11$.

Zatem Karolina ma obecnie 11 lat.

Teraz obliczymy, ile lat ma obecnie Marta, sprawdzając przy okazji, czy znalezione przez nas rozwiązanie spełnia wszystkie warunki zadania.

Jeśli Karolina ma obecnie 11 lat, to 7 lat temu miała 4 lata. Z tekstu zadania wiemy, że gdy Marta miała tyle lat, ile Karolina 7 lat temu, czyli gdy Marta miała 4 lata, to była wtedy dwa razy starsza od Karoliny. Z tego wniosek, że Karolina miała wówczas $4:2=2$ lata. Marta jest zatem starsza od Karoliny o $4-2=2$ lata. Jeśli więc obecnie Karolina ma 11 lat, to Marta musi mieć $11+2=13$ lat. Za trzy lata Marta będzie miała $13+3=16$ lat a Karolina $11+3=14$ lat, czyli razem będą mieć $16+14=30$ lat. Wynik ten jest zgodny z tekstem zadania. Możemy więc napisać odpowiedź: Karolina ma obecnie 11 lat a Marta 13 lat.

Aby rozwiązać następne zadanie – łamigłówkę, nie trzeba wykonywać żadnych działań na liczbach. Rozwiązując je zapoznamy się z niesłychanie ważnym typem rozumowania matematycznego – wnioskowaniem z przypuszczenia oraz z dowodzeniem poprzez sprowadzenie do niedorzeczności.

Zadanie 4

Plażowa dedukcja

Marcin w czasie wakacji nad morzem poznał pięć koleżanek: Krysię, Danusię, Jadzię, Agatkę i Zuzię. Każda z dziewcząt przyjechała z innego miasta (Łódź, Opole, Rzeszów, Wrocław i Bydgoszcz), nie chciały jednak powiedzieć, która z jakiego. Pytane udzielały wykrętnych odpowiedzi. Krysia powiedziała: „Danusia nie mieszka w Bydgoszczy, Agatka mieszka w Rzeszowie, Zuzia nie mieszka we Wrocławiu". Danusia stwierdziła: „Jadzia mieszka w Bydgoszczy, Krysia nie mieszka w Rzeszowie, Agatka nie mieszka w Opolu". Jadzia odpowiedziała: „ja nie mieszkam w Rzeszowie, Zuzia mieszka w Łodzi, Krysia nie mieszka we Wrocławiu". Agatka oznajmiła: „Danusia nie mieszka w Opolu, Jadzia nie mieszka w Łodzi, Krysia mieszka w Bydgoszczy". Zuzia, znana z tego, że nigdy nie kłamie, powiedziała Marcinowi, że każda z jej koleżanek tylko raz powiedziała prawdę, dwukrotnie zaś skłamała. Chłopiec domyślił się jednak, w jakim mieście mieszka każda z dziewcząt. Czy potrafisz powiedzieć, jak tego dokonał?

Rozwiązanie

Ujmijmy informacje zawarte w wypowiedziach dziewcząt w tabelkę.

	1	2	3
Krysia	*Danusia nie mieszka w Bydgoszczy*	*Agatka mieszka w Rzeszowie*	*Zuzia nie mieszka we Wrocławiu*
Danusia	*Jadzia mieszka w Bydgoszczy*	*Krysia nie mieszka w Rzeszowie*	*Agatka nie mieszka w Opolu*
Jadzia	*Jadzia nie mieszka w Rzeszowie*	*Zuzia mieszka w Łodzi*	*Krysia nie mieszka we Wrocławiu*
Agatka	*Danusia nie mieszka w Opolu*	*Jadzia mieszka w Łodzi*	*Krysia mieszka w Bydgoszczy*

Zgodnie z tym, co powiedziała Zuzia (a wiadomo, że Zuzia nigdy nie kłamie), każda z jej koleżanek tylko raz powiedziała prawdę, zaś dwa razy skłamała. Przeanalizujmy stwierdzenie Krysi. Nie wiemy, która jego część jest prawdziwa. Rozpoczynamy wnioskowanie z przypuszczenia. Przypuśćmy, że prawdziwa jest pierwsza część – mówiąca, że Danusia nie mieszka w Bydgoszczy. Zatem pozostałe dwie części jej stwierdzenia są fałszywe. Nas szczególnie interesuje część trzecia – „Zuzia nie mieszka we Wrocławiu". Jeżeli stwierdzenie, że Zuzia nie mieszka we Wrocławiu jest kłamstwem, to znaczy, że w rzeczywistości Zuzia mieszka we Wrocławiu. W tym momencie najważniejszymi dla nas słowami są „Zuzia" oraz „Wrocław". Szukamy któregokolwiek z nich w odpowiedziach pozostałych dziewcząt. Chcemy ponadto, by w znalezionym fragmencie obok któregoś ze słów „Zuzia" oraz „Wrocław" było również sformułowanie „nie mieszka". Przeglądając tabelkę szybko znajdujemy stwierdzenie, iż Krysia nie mieszka we Wrocławiu. Występuje w nim słowo „Wrocław" oraz sformułowanie „nie mieszka". Jest to zatem stwierdzenie jakiego szukaliśmy. Jest ono trzecią częścią odpowiedzi Jadzi. Ponieważ wcześniej ustaliliśmy, że Zuzia mieszka we Wrocławiu – zaś w tekście zadania jest jasno stwierdzone, że każda z dziewcząt mieszka w innym mieście – więc w świetle tego Krysia nie może mieszkać we Wrocławiu. Zatem trzecia część odpowiedzi Jadzi jest prawdziwa. W takim razie dwie pierwsze części jej stwierdzenia są kłamstwami (każda z dziewcząt, oprócz Zuzi, tylko raz powiedziała prawdę, dwukrotnie zaś skłamała). Nas szczególnie interesuje pierwsza część odpowiedzi Jadzi, „Jadzia nie mieszka w Rzeszowie". Skoro jest to kłamstwo, to Jadzia mieszka w Rzeszowie.

Zakładając na samym początku, że pierwsza część stwierdzenia Krysi jest prawdą, doszliśmy do wniosku, że Zuzia mieszka we Wrocławiu a Jadzia w Rzeszowie. W tym momencie najważniejszymi dla nas słowami są „Jadzia" oraz „Rzeszów". Szukamy któregokolwiek z tych dwóch słów w odpowiedziach dwóch pozostałych dziewcząt, czyli Danusi i Agatki. Oczywiście chcemy również, by było tam też sformułowanie „nie mieszka". Znajdujemy aż dwa takie stwierdzenia. W drugiej części swojej wypowiedzi Danusia mówi, iż Krysia nie mieszka w Rzeszowie a Agatka w drugiej części swojej odpowiedzi stwierdza, że Jadzia nie mieszka w Łodzi. Ponieważ wcześniej ustaliliśmy, że Jadzia mieszka w Rzeszowie, więc nie może jednocześnie mieszkać w Łodzi. Zatem druga część odpowiedzi Agatki jest prawdą. Również prawdą jest druga część stwierdzenia Danusi, gdyż jeśli Jadzia mieszka w Rzeszowie, to nie może w tym samym mieście mieszkać Krysia. Skoro prawdziwe są drugie części odpowiedzi Danusi i Agatki, to w takim razie – ponieważ każda z dziewcząt tylko raz powiedziała prawdę a dwa razy skłamała – kłamstwami muszą być pozostałe części ich odpowiedzi. Nas szczególnie interesuje trzecia część stwierdzenia Danusi, w której mówi ona, iż Agatka nie mieszka w Opolu, oraz pierwsza część odpowiedzi Agatki, która brzmi „Danusia nie mieszka w Opolu". W świetle wcześniejszych ustaleń oba przytoczone stwierdzenia są kłamstwami. Oznacza to, że w rzeczywistości Agatka mieszka w Opolu i Danusia również mieszka w Opolu. Jest to sprzeczne z warunkami zadania – w jednym mieście mieszka tylko jedna z dziewcząt. Otrzymana sprzeczność jest rezultatem albo błędnie przeprowadzonego rozumowania, albo przyjętego na samym początku błędnego założenia, iż pierwsza część odpowiedzi Krysi jest prawdą. Ponieważ błąd w rozumowaniu można od razu wykluczyć (rozumowanie jest bowiem bardzo proste i w razie jakiejkolwiek wątpliwości można je z łatwością jeszcze raz prześledzić potwierdzając w ten sposób jego poprawność), zatem za powstałą sprzeczność odpowiada błędne założenie, zgodnie z którym pierwsza część odpowiedzi Krysi jest prawdą.

Przypuśćmy w takim razie, że druga część stwierdzenia Krysi jest prawdą, czyli że Agatka mieszka w Rzeszowie. Skoro Agatka mieszka w Rzeszowie, to nie może mieszkać jednocześnie w Opolu. Z tego wynika, że trzecia część odpowiedzi Danusi

jest prawdą. Z tego, że Agatka mieszka w Rzeszowie wynika również to, że nie może w tym mieście mieszkać Krysia. Oznacza to, że druga część stwierdzenia Danusi jest prawdą. W tym momencie doszliśmy do sprzeczności. Wywnioskowaliśmy bowiem, że druga i trzecia część odpowiedzi Danusi są zgodne z prawdą, czyli że Danusia co najmniej dwa razy powiedziała prawdę. Z tekstu zadania wiemy natomiast, że każda z dziewcząt – oprócz Zuzi – tylko raz powiedziała prawdę, dwukrotnie zaś skłamała. Otrzymana sprzeczność, podobnie jak w poprzednim przypadku, nie jest wynikiem źle przeprowadzonego rozumowania, lecz powstała w rezultacie przyjęcia błędnego założenia – że druga część odpowiedzi Krysi jest prawdą.

W wyniku dotychczas przeprowadzonego rozumowania wywnioskowaliśmy, że pierwsza i druga część odpowiedzi Krysi są kłamstwami. Przekonajmy się w takim razie, jakie będą konsekwencje przyjęcia, iż trzecia część stwierdzenia Krysi jest prawdą. Pierwszą, bezpośrednią konsekwencją tego jest oczywiście to, że dwie pozostałe części są kłamstwami. Nas szczególnie interesuje część pierwsza odpowiedzi Krysi, w której stwierdza ona, że Danusia nie mieszka w Bydgoszczy. Jeżeli bowiem stwierdzenie, że Danusia nie mieszka w Bydgoszczy jest kłamstwem, to znaczy, że w rzeczywistości Danusia mieszka w Bydgoszczy. Skoro więc Danusia mieszka w Bydgoszczy, to w takim razie nie może mieszkać w Opolu. Zatem pierwsza część odpowiedzi Agatki jest prawdą, zaś dwie pozostałe kłamstwami. Nas interesuje zwłaszcza druga część odpowiedzi Agatki ze względu na znajdujące się tam sformułowanie „nie mieszka". Jeżeli bowiem stwierdzenie, że Jadzia nie mieszka w Łodzi jest kłamstwem, to prawdą jest, że Jadzia mieszka w Łodzi. Zakładając, że trzecia część stwierdzenia Krysi jest prawdą, doszliśmy do wniosku, że Danusia mieszka w Bydgoszczy, a Jadzia w Łodzi. Kontynuujmy nasze rozumowanie. Skoro Jadzia mieszka w Łodzi, to nie może mieszkać w Rzeszowie. Zatem pierwsza część odpowiedzi Jadzi jest prawdą, zaś dwie pozostałe kłamstwami. Interesuje nas szczególnie trzecia część odpowiedzi Jadzi, która brzmi; „Krysia nie mieszka we Wrocławiu". Ponieważ, jak przed chwilą ustaliliśmy, jest to kłamstwo, zatem prawdą jest, iż Krysia mieszka we Wrocławiu. Jeżeli mieszka we Wrocławiu, to nie może mieszkać w Rzeszowie. Zatem druga część odpowiedzi Danusi jest prawdą, a pierwsza i trzecia to kłamstwa. Nas interesuje trzecia odpowiedź, w której Danusia stwierdza, że Agatka nie mieszka w Opolu. Ponieważ, zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami, jest to kłamstwo, w rzeczywistości Agatka mieszka w Opolu.

Ustaliliśmy zatem, że Danusia mieszka w Bydgoszczy, Jadzia w Łodzi, Krysia we Wrocławiu, a Agatka w Opolu. W tym wyliczeniu brakuje tylko Zuzi oraz Rzeszowa. Zatem Zuzia mieszka właśnie w Rzeszowie.

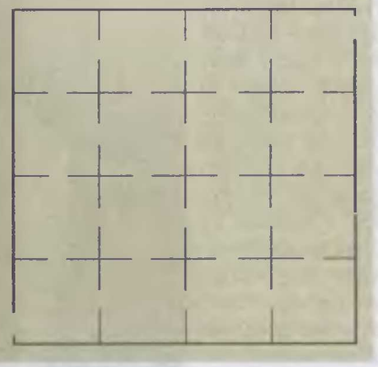
Jak widać, nigdzie nie natrafiliśmy na sprzeczność. Aby otrzymany wynik można było z całą pewnością uznać za rozwiązanie zadania, należy jeszcze sprawdzić, czy rzeczywiście ów wynik spełnia wszystkie warunki zadania.

Jest to czynność bardzo łatwa, która ma nas upewnić, że każda z dziewcząt (oprócz Zuzi) raz powiedziała prawdę, zaś dwukrotnie skłamała. Sprawdźmy dla przykładu przypadek Krysi. Stwierdziła ona, że Danusia nie mieszka w Bydgoszczy. W świetle otrzymanego wyniku jest to oczywiście nieprawdą. Krysia stwierdziła także, że Agatka mieszka w Rzeszowie. I to również jest nieprawdą. Wreszcie trzecia część wypowiedzi Krysi („Zuzia nie mieszka we Wrocławiu") jest prawdziwa ponieważ zgodnie z otrzymanym wynikiem Zuzia mieszka w Rzeszowie. Zatem Krysia rzeczywiście dwukrotnie skłamała, zaś raz powiedziała prawdę. Podobnie sprawdzamy wypowiedzi Danusi, Jadzi i Agatki.

Eugeniusz Sikorski

Łamanie głowy czyli burza w mózgu

1. Pałac maharadży



Pewien maharadża miał pałac z szesnastoma komnatami. Ich rozkład przedstawia rysunek obok.

Maharadża lubił codziennie przechadzać się po ogrodzie otaczającym pałac. Potem zwykł wchodzić do pałacu wejściem widocznym na planie w lewym dolnym rogu, przechodzić przez każdą z szesnastu komnat i wychodzić wyjściem znajdującym się na planie w prawym górnym rogu. Nigdy jednak nie udało mu się przejść przez swój pałac tak, by każdą z szesnastu komnat odwiedzić dokładnie jeden raz. Czy jest to możliwe?

2. Dwaj bracia

Gdy Piotr miał połowę tych lat, ile ma obecnie Paweł, obaj bracia mieli w tym czasie razem 18 lat. Natomiast za 5 lat będą mieli łącznie 40 lat. Ile lat ma obecnie każdy z braci?

3. Dzieci matematyka

Spotkali się dwaj matematycy. Ponieważ dawno się nie widzieli, rozmowa zeszła na sprawy rodzinne.

- Pewnie się ożeniłeś, masz dzieci? - pyta jeden.
- Tak, mam troje.
- W jakim wieku?
- Odpowiem ci tak: iloczyn wieku moich dzieci wynosi 36.
- Za mało danych.
- Rzeczywiście, popatrz na ten dom i policz jego okna.
- Policzyłem.
- Masz zatem sumę wieku moich dzieci.
- To jeszcze za mało danych.
- Masz rację, weź jednak pod uwagę, że moje najstarsze dziecko ma zielone oczy.
- No tak! Oczywiście, już wiem!

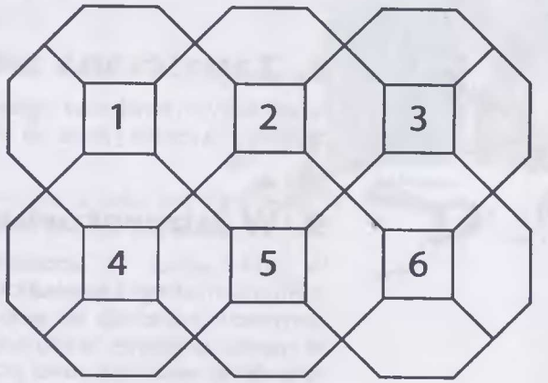
Ile lat mają dzieci naszego matematyka?

4. W kłębach dymu

W pociągu, w różnych przedziałach (dla palących) siedzi w kłębach tytoniowego dymu wielu mężczyzn. Ośmiu mężczyzn pali cygara, sześciu papierosy, a czterech fajki. Kilku z jadących pociągiem palaczy nie ogranicza się tylko do jednego rodzaju używki. Trzej panowie palą nie tylko papierosy, lecz także cygara; dwaj palą cygara i fajki, jeden zaś - i papierosy, i cygara, i fajkę. Ilu palaczy jedzie pociągiem?

5. Wirówka cyfrowa

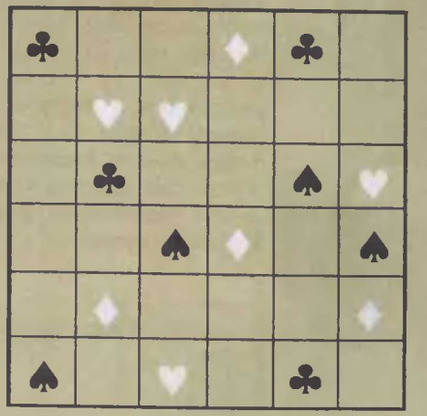
Liczby należy wpisywać prawoskrętnie. Początek wpisywania liczb do odgadnięcia.



1. Największy wspólny dzielnik liczb 3024, 4032 i 6048;
2. Reszta z dzielenia liczby 31196 przez 2401;
3. Jedna z liczb, która przy dzieleniu przez 1748 daje resztę 867;
4. Jedna z pięciu kolejnych liczb naturalnych, których suma wynosi 7000;
5. Objętość w centymetrach sześciennych prostopadłościanu o wymiarach 41x13x4 cm.
6. Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6. Kwadrat do podziału

Podziel widoczny na rysunku kwadrat na 4 jednakowe części (pod względem powierzchni i kształtu) w taki sposób, by w każdej z nich pojawił się dokładnie raz każdy z 4 symboli. Podziału należy dokonać wzdłuż linii.



7. Loteria fantowa

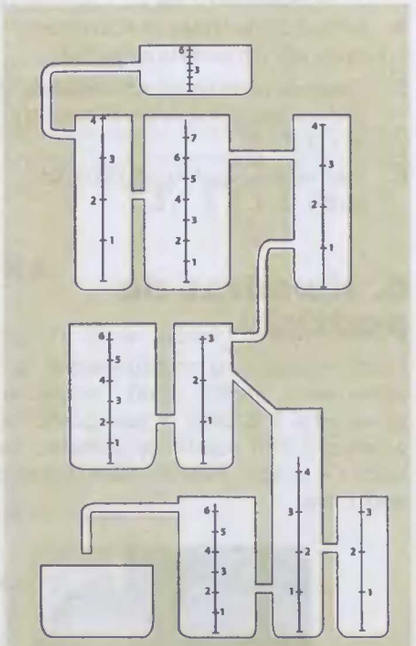
Podczas pewnej loterii na dziesięciu kartkach napisano liczby od 1 do 10. Kartki włożono do kapelusza i poproszono pięciu szczęśliwców, by po kolei wyciągali po dwie kartki. Przy zapisywaniu wyników zaszła jednak śmieszna pomyłka. Gdy bowiem jeden z organizatorów loterii oglądając wylosowanie kartki głośno mówił na przykład „5 i 7", jego asystent w roztargnieniu dodawał te liczby i zapisywał tylko ich sumę: „12". Tak więc wyniki losowania nagród zapisano następująco: Starczyk 11, Kozanecki 4, Białkowska 7, Rogala 16, Żobiński 17. A przecież każdej z tych osób należą się dwie nagrody za wylosowane dwie liczby. Czy można ustalić, kto wylosował jakie dwie liczby? Raz wyciągnięte kartki nie wracały już do kapelusza.

8. Zapałczana układanka

Ile jednakowych kwadratów można ułożyć z 24 zapałek, pod warunkiem, że wykorzystamy je wszystkie i żadna nie zostanie złamana?

9. W laboratorium

W XIX wieku w laboratorium chemicznym jednego z niemieckich uniwersytetów znajdowało się widoczne na rysunku urządzenie. Służyło ono do sprawdzania wyobraźni nowo przyjętych studentów. Osoba sprawdzana miała odpowiedzieć na pytanie, ile litrów wody dotrze do widocznej na samym dole miednicy, jeśli do znajdującego się na samej górze naczynia nalano określoną ilość tego płynu.



A czy Ty dobrze wypadłbyś w opisanym teście? Sprawdź to odpowiadając na pytanie: ile litrów wody dotrze do miednicy, jeżeli do górnego zbiornika wlano 35 litrów? Ilość wody, która znajdzie się w rurkach łączących poszczególne naczynia, można pominąć. Ostępy na podziałkach pomiędzy dwiema kreseczkami zawsze odpowiadają jednemu litrowi. Raz są większe, raz mniejsze, gdyż menzurki są grubsze i cieńsze.

10. Matematyczne psoty

Podczas lekcji matematyki nauczyciel napisał na tablicy pewne mnożenie. W chwilę później został poproszony do telefonu. W czasie jego nieobecności jeden z uczniów zamienił cyfry w zapisanym działaniu na litery w ten sposób, że w miejsce każdej cyfry parzystej wpisał literę P, a nieparzystej literę N. Kiedy nauczyciel wrócił do klasy, na tablicy widniał następujący zapis:

$$\begin{array}{r} PNPN \\ \times\ \ PNP \\ \hline PPPPP \\ PNNN \\ +NNNP \\ \hline PPPPNP \end{array}$$

Ku zdumieniu uczniów wcale się tym kawałem nie przejął, tylko domyśliwszy się, że litery P oznaczają cyfry parzyste, a N – nieparzyste, na oczach klasy odtworzył pierwotny iloczyn. Jak on wyglądał?

11. Mleko i woda

W naczyniu A jest jeden litr wody, natomiast naczynie B zawiera jeden litr mleka. Napełniamy szklankę wodą z naczynia A i wlewamy ją do naczynia B. Mieszamy i jedną szklankę tej mieszaniny z naczynia B wlewamy do naczynia A. Czy po tej operacji ilość mleka zawarta w naczyniu A będzie większa, równa czy mniejsza od ilości wody zawartej w naczyniu B?

12. Przed świętem zmarłych

Pewien wytwórca zniczy nagrobnych zauważył, że z odpadów produkcyjnych, powstałych przy produkcji 6 zniczy, może wytworzyć jeden nowy znicz. Kiedy zajrzał do magazynu stwierdził, że dysponuje odpadami produkcyjnymi z 600 zniczy. Ile zniczy może wytworzyć z tego materiału?

Zagadki lateralne

Na początek małe wyjaśnienie czym są zagadki lateralne. Sam termin „myślenie lateralne" ukuty został przez Edwarda de Bono na określenie stylu rozwiązywania problemów, w którym spogląda się na daną sytuację pod nowym, nieoczekiwanym kątem. Zagadki lateralne są tak skonstruowanymi łamigłówkami, aby skierować nasz umysł na „ślepą uliczkę", która nie zawiera rozwiązania. W ten sposób można łatwo sprawdzić, czy nasz umysł pracuje jednotorowo. Jeśli tak, to po prostu takiej zagadki nie rozwiążemy, zasugerowani podsuniętym kierunkiem myślenia. Jednakże po przedstawieniu nam rozwiązania będziemy zdumieni, że nie wpadliśmy na nie – przecież jest ono takie oczywiste! Rozwiązania takich zagadek są czasem nieco zwariowane i dziwne, jednak zawsze logiczne.

13. Winda i deszcz

Pewien człowiek mieszka na ostatnim piętrze bardzo wysokiego budynku. Każdego dnia idąc do pracy jedzie windą aż na parter, jednak wracając wjeżdża windą tylko do połowy wysokości, a dalej idzie po schodach. Chyba, że pada deszcz – wtedy wjeżdża na samą górę! Dlaczego?

14. Wypadek samochodowy

Ojciec i syn mieli wypadek samochodowy. Ojciec zginął, syna przewieziono do szpitala. Chirurg zobaczywszy go krzyczy: „Nie mogę operować tego chłopca, on jest moim synem!". Jak to możliwe?

15. Bliźniaki?

Każdego roku Piotr obchodzi swoje urodziny dwa dni później, niż jego brat bliźniak Paweł swoje. Dlaczego?

Kupon konkursowy

MIMM 01/2002

Liczba rozwiązań:

. . . . . .

Wśród Czytelników, którzy do końca listopada 2002 nadeślą prawidłowe rozwiązania zadań z działu „Łamanie głowy...", rozlosujemy nagrody.

Główna nagroda (za rozwiązanie przynajmniej 12 zadań) – **200 zł**

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) po – **100 zł**

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) po – **50 zł**

Rozwiązania można przysyłać na kartkach pocztowych lub w kopertach z naklejonym kuponem konkursowym pod adresem redakcji. Na kuponie prosimy wpisać liczbę rozwiązanych zadań.

„Kto lekceważy osiągnięcia matematyki, przynosi szkodę całej nauce, ponieważ ten, kto nie zna matematyki, nie może poznać innych nauk ścisłych i nie może poznać świata".

Roger Bacon

„Słodko spożywamy matematykę i dzieje się nam jak Lotofagom: bo skosztowawszy jej, nie chcemy już od niej odstąpić i owłada nami jak kwiat lotosu".

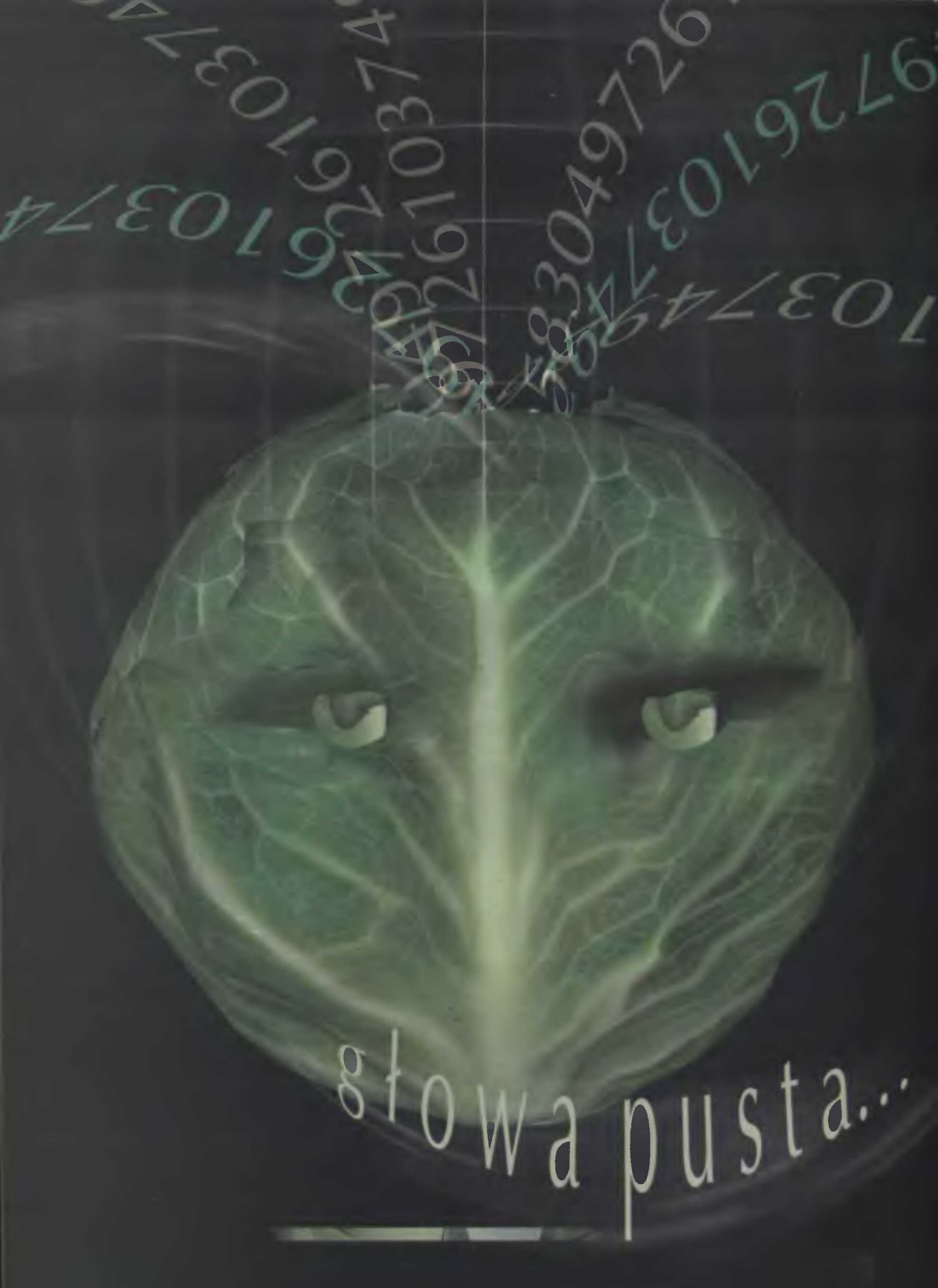
Arystoteles

„Matematyka to język, w którym nie można wyrazić nieprecyzyjnych, czy mglistych myśli".

Henri Poincare

„Wciąż jest dla mnie źródłem nieustającego zdziwienia, że kilka znaków nagryzmolonych na tablicy lub na kartce papieru może zmienić bieg ludzkich spraw".

Stanisław M. Ulam


głowa pusta...