JANUSZ LIBICKI

ZARYS TEORJI KOSZTÓW PRODUKCJI

Osobne odbicie z tomu XXIX »Czasopisma Prawniczego«

KRAKÓW
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO
1935

Janusz Libicki.

Zarys teorji kosztów produkcji.

ROZDZIAŁ I.

Pojęcie produkcji i kosztów produkcji.

Ostatecznym celem gospodarowania jest konsumcja. Dla ekonomisty jednak sam fakt konsumcji nie nastręcza interesujących problemów. Wiele spośród starszych podręczników ekonomji opartych było na znanym trójpodziale: Produkcja, Rozdział dochodu społecznego, Konsumcja. Tak np. rozpowszechnione dziś jeszcze u nas K. Gide'a »Zasady Ekonomji Politycznej« dzielą się na cztery księgi. Księga pierwsza: Produkcja, Księga druga: Obrót, Księga trzecia: Rozdział dochodów, Księga czwarta: Konsumcja. Dziś uwagę ekonomisty koncentrują przedewszystkiem wszelkiego rodzaju zjawiska gospodarcze, które poprzedzają konsumcję.

Zadaniem niniejszej pracy jest omówienie pewnego zakresu tych zjawisk, a mianowicie tych, które bezpośrednio łączą się z pojęciem produkcji. Przedewszystkiem więc należy omówić to właśnie pojęcie.

Termin »produkcja« łączy się ściście w naszym umyśle z pojęciem wytwarzania czegoś nowego, czegoś, czego jeszcze nie było i co zawdzięcza swoje powstanie właśnie działalności produkcyjnej. Takie określenie jest oczywiście bardzo jeszcze niekompletne. Trzeba ściśle określić, co to jest to »coś nowego, co powstaje dzięki działalności produkcyjnej«, i w jaki sposób dzięki niej powstaje.

U podstaw każdego rozważania ekonomicznego musi znajdować się teorja wartości, stanowiąca fundament całego późniejszego rozumowania. Teorja ta może być wypowiedziana przez autora explicite w sposób nie nastręczający żadnych wątpliwości co do jego poglądów na ten temat. Może się jednak często zdarzać, że terminy »wartość« i »teorja wartości« nie zostaną ani razu użyte ności? Działalność produkcyjna polega na zorganizowaniu współdziałania t. zw. czynników produkcji, t. j. ziemi, pracy i kapitału (kapitału w znaczeniu nagromadzonych narzędzi produkcji) celem uzyskania nowych użyteczności. Do dwóch pierwszych czynników produkcji stosuje się niekiedy określenie pierwotne (albo nieprodukowane) czynniki produkcji, do ostatniego zaś, obejmującego terminem »kapitał« cały kompleks pojęć, określenie pochodne (albo produkowane) czynniki produkcji.

Najszersza definicja produkcji będzie więc następująca: Produkcja jest to organizowanie współdziałania czynników produkcji, celem uzyskania nowych użyteczności.

Dla uniknięcia możliwych nieporozumień w stosunku do dalszych części tej pracy, należy odrazu zaznaczyć, że to tak zdefinjowane pojęcie produkcji będzie się odnosiło wyłącznie do wytwarzania nowych użyteczności w postaci dóbr materjalnych.

Jakie zadania ma przed sobą teorja produkcji? W pracy zatytułowanej »Theorie der Produktion«, umieszczonej w drugim tomie »Wirtschaftstheorie der Gegenwart« (Wiedeń 1932) R. Wilbrandt twierdzi: »Dla czysto teoretycznego celu wyjaśnienia stosunków wymiennych posiada teorja produkcji następujące znaczenie: 1) uzupełnienie nauki o wartości i o cenie przez omówienie praw, rządzących kosztami produkcji; 2) wykazanie, jaki wpływ na produkcję, odbywającą się w ramach gospodarki wymiennej wywierają zmiany ceny; 3) położenie podstaw pod naukę o tworzeniu się dochodu społecznego i pod naukę o konjunkturze« [1].

Z tego punktu widzenia praca niniejsza usiłuje odpowiedzieć na pewne pytania łączące się z problemami, wymienionemi przez Wilbrandta pod 1) i 2). Jak zaznaczyłem praca ta usiłuje odpowiedzieć tylko na pewne pytania, t. zn. celem jej nie jest wyczerpanie problemu.

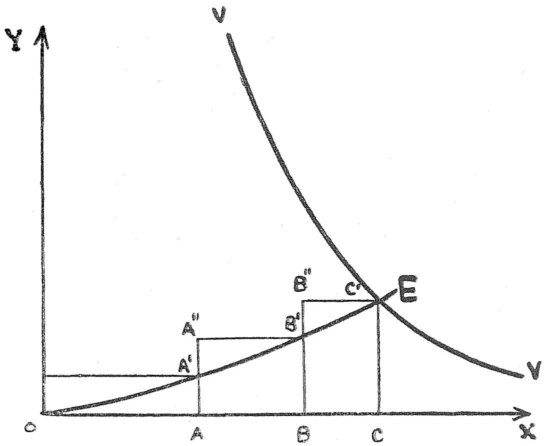
Przeprowadzona w tej pracy analiza kosztów produkcji i praw, rządzących niemi (a właściwie, ściślej mówiąc, związków, zacho-

---

[1] Für den rein theoretischen Zweck einer Durchleutung der Tauschbeziehungen hat die Theorie der Produktion die Bedeutung, 1. die Lehre von Wert und Preis zu ergänzen durch Eingehen auf die Produktionsgesetze, welche die Produktionskosten beherrschen; 2. zu zeigen, wie sich die Produktion in der Tauschgesellschaft an den Preisen orientiert; 3. für die Lehre von Einkommensbildung und Konjunkturen Grundlagen zu legen (str. 240).

dzących między kosztami produkcji a ilością wyprodukowanych jednostek) nie odnosi się do całości danej gałęzi produkcji, ale ogranicza się do zakresu zjawisk, zachodzących w granicach jednego tylko przedsiębiorstwa.

Jeżeli wszystkie przedsiębiorstwa pewnej gałęzi produkcji uszeregujemy według wysokości ich kosztów produkcji w ten sposób, że rozpoczniemy od tego, który produkuje po najniższych kosztach i skończymy na produkującym po najwyższych kosztach, czyli na t. zw. przedsiębiorstwie krańcowem, otrzymamy sytuację, której obrazem może być wykres na rys. 1.



Rys. 1.

Odcinek OA przedstawia ilość produkowaną w przedsiębiorstwie I. Odcinek AA' przedstawia koszt jaki musi ponieść przedsiębiorca I dla wyprodukowania jednej jednostki wówczas, gdy cała jego produkcja równa się ilości OA. Prostokąt $OAA'D$ przedstawia zatem sumę kosztów produkcji, poniesioną przez tego przedsiębiorcę. Analogicznie skonstruowane są prostokąty następne i analogiczne jest ich znaczenie. Przedsiębiorstwo II produkuje ilość AB po koszcie jednostkowym BB', a przedsiębiorstwo III ilość BC po koszcie jednostkowym CC'. Przypuśćmy, że przedsiębiorstwo III jest przedsiębiorstwem krańcowem, wówczas cena (w warunkach wolnokonkurencyjnych) ustali się na poziomie kosztów jednostkowych tego właśnie przedsiębiorstwa. Jeżeli teraz przypuścimy, że tych przedsiębiorstw jest nie trzy ale bardzo wiele, wówczas linja łamana $ODA'A''B'B''C'$ będzie coraz podobniejsza do linji krzywej OE, wychodzącej z początku układu współrzędnych i przechodzącej przez punkty $A'B'C'$. Ta linja krzywa OE jest to t. zw. krzywa podaży[1]. Badanie tej

[1] Zaznaczyć należy odrazu, że podaną tutaj interpretację krzywej podaży uważam za niewystarczającą. Dokładne omówienie krzywej po-

krzywej podaży oznaczałoby badanie problemów produkcji i kosztów, zachodzących na obszarze całej danej gałęzi produkcji. Otóż, zadaniem niniejszej pracy jest zbadanie związków, zachodzących między kosztami produkcji i ilością produkowaną wyłącznie na terenie jednego tylko przedsiębiorstwa, a więc zbadanie tego, co się dzieje w zakresie jednego tylko z tych małych prostokątów przedstawionych na wykresie na rys. 1. O ile więc w pracy tej użyte będzie wyrażenie »krzywa kosztów« należy pamiętać, że odnosi się ono tylko do jednego przedsiębiorstwa, podczas gdy wyrażenie »krzywa podaży« odnosi się do całej danej gałęzi produkcji. W dodatku praca niniejsza opiera się na założeniu, że każde indywidualne przedsiębiorstwo jest własnością innego przedsiębiorcy. A więc np. Marshall'owski problem korzyści i niekorzyści, wynikających z łączenia kilku przedsiębiorstw pod jednem kierownictwem, nie jest w pracy rozważany. Ostatecznie więc zadanie tej pracy jest ograniczone do badania związków między wielkością produkcji i jej kosztami w zakresie jednego, indywidualnie kierowanego przedsiębiostwa. Teraz skolei omówić należy pojęcie kosztów produkcji.

Uzyskiwanie nowych użyteczności może odbywać się tylko drogą utraty pewnych, posiadanych już użyteczności. Można więc powiedzieć, że produkcja jest to uzyskiwanie nowych użyteczności kosztem pewnych, już posiadanych użyteczności. Czyli, używając niestety nieprzetłomaczalnej terminologji ekonomistów angielskich, jest to uzyskiwanie nowych utilities kosztem pownych disutilities. W najprymitywniejszych warunkach jedyną disutility jest praca bezpośrednio włożona w wytwarzanie nowych użyteczności. Wówczas gdy produkcja odbywa się już przy pomocy choćby najprostszych narzędzi, w rachunku disutilities musi być wzięta pod uwagę również i praca pośrednio włożona w uzyskanie tych nowych użyteczności, czyli praca potrzebna do wytworzenia narzędzi użytych w procesie produkcyjnym. Gdy zaś ograniczoność jednego z środków produkcji, np. ziemi tej samej urodzajności, powoduje powstanie renty, fakt ten musi być również uwzględniony w rachunku disutilities. Kalkulacja przedsiębiorcy, organizującego współdziałanie czynników produkcji, polega na porównywaniu tych

daży wymaga jednak uprzedniego zapoznania się z szeregiem problemów, będących tematem następnych rozdziałów. Dlatego problem krzywej podaży został odłożony do rozdziału IX.

utilities i disutilities, będących rezultatem procesu produkcyjnego, czyli na porównywaniu użyteczności uzyskanych i użyteczności straconych.

Dokładna wymierność tych utilities i disutilities możliwa jest jedynie w ramach wymiennej gospodarki pieniężnej. Dla dzisiejszego przedsiębiorcy wszystkie disutilities dadzą się praktycznie sprowadzić do kosztu pieniężnego. Ceny czynników producji, których współdziałanie on organizuje, są wyrażone w pieniądzu. Praca bezpośrednio przez niego zatrudnionych pracowników jest jego wydatkiem pieniężnym. Tak samo praca pośrednia i ewentualnie renta zawarta w cenie, nabywanych przez niego narzędzi produkcji i surowców. Tak samo wreszcie procent od zainwestowanego przez niego kapitału pieniężnego, niezależnie od tego czy kapitał ten był jego własny, czy też został wypożyczony. Dla dzisiejszego przedsiębiorcy i z jego punktu widzenia jedynym czynnikiem produkcji jest jego zapas siły kupna (w postaci pieniądza), który umożliwia mu dysponowanie usługami i dobrami, niezbędnemi w przeprowadzanym przez niego procesie produkcyjnym.

Wszystkie więc utracone przez niego w toku procesu produkcyjnego użyteczności są, jak już wspomniałem, jego kosztem pieniężnym. Analogicznie wszystkie uzykane przez niego użyteczności są dla niego również wyrażone, w postaci sumy cen, uzyskanych za wyprodukowane przez niego dobra. Różnica między użytecznościami uzyskanemi a straconemi jest pieniężnym zyskiem przedsiębiorcy, względnie w wypadku przewagi tych ostatnich, jego pieniężną stratą.

Pozostaje jeszcze do omówienia kwestja założeń, na których opiera się wywód następnych rozdziałów. Niektóre z nich były już wymienione, a mianowicie gospodarka wymienna pieniężna i wolnokonkurencyjna, oraz indywidualne kierownictwo każdego przedsiębiorstwa. Dalszem założeniem jest niezmienny stan techniki produkcyjnej. Przyjmuje się zatem, że wszelkie zmiany ilości produkowanej odbywają się na tym samym poziomie technicznym*. Najwięcej trudności nastręcza najważniejsze założenie, a mianowicie założenie częściowej równowagi.

Pojęcie o g ó l n e j r ó w n o w a g i gospodarczej implikuje interdependencję wszystkich elementów życia gospodarczego. Założenie r ó w n o w a g i c z ę ś c i o w e j polega na jakgdyby wydzieleniu pewnych elementów życia gospodarczego i zerwaniu ich współzależności z innemi. Zakładając, że te inne pozostają niezmienne, uruchamia się te wybrane, utrzymując założenie interdependencji tylko w zakresie tych ostatnich. Pojęcie równowagi częściowej jest więc w zasadzie sprzeczne z pojęciem równowagi ogólnej. Uważam jednak, że można przyznać słuszność J. Viner'owi, który w pracy p. t.: »Cost curves and supply curves«, ogłoszonej w »Zeitschrift für Nationalökonomie« (Band III, Heft 1) pisze o założeniu częściowej równowagi: »Tego rodzaju założeń, logicznie niezbyt silnie ugruntowanych, można bronić pragmatycznie tem, że pozwalają one na przeprowadzenie bardziej dokładnej analizy pewnych postaci współzależności gospodarczej, niż byłoby to możliwe bez nich i że w tym zakresie, w jakim są one fikcjami niezrównoważonemi przez inne fikcje, uzasadnione jest przypuszczenie, że pomyłki w otrzymanych rezultatach będą prawie zawsze raczej ilościowe niż jakościowe i nawet ilościowo będą naogół o niewielkiej doniosłości« [1].

W rozpatrywanym wypadku temi wielkościami wybranemi i uruchomionemi, do których wyłącznie stosuje się założenie współzależności są: rozmiary produkcji w zakresie danego przedsiębiorstwa i wysokość jego kosztów produkcji. W wypadkach, gdy jest mowa o cenie gotowego produktu i jej zmianach przyjmuje się, że oddziaływują one na rozmiary produkcji danego przedsiębiorstwa a nie naodwrót, a to na tej podstawie, że rozmiary produkcji danego przedsiębiorstwa przyjmuje się za stosunkowo niewielkie wobec rozmiarów ogólnej podaży tego dobra. Nie jest to więc pełna współzależność a tylko zależność jednokierunkowa, a mianowicie zależność rozmiarów produkcji danego przedsiębiorstwa od ceny gotowego produktu. Zupełnie »unieruchomione« pozostają natomiast wszystkie inne elementy życia gospodarczego, a więc w pierwszym rzędzie ceny czynników produkcji (jak np. stopa procentowa i płaca robocza), oraz ceny wszystkich innych gotowych produktów i surow-

[1] For such logically invalid assumptions there is the pragmatic defense that they permit of more detailed analysis of certain phases of economic interdependence than would be possible in their absence, and that to the extend that they are fictions uncompensated by counterbalancing fictions, it is reasonable to believe that the errors in the results obtained will be almost invariably quantitative rather than qualitative in character, and will generally be even quantitatively of minor importance (str. 24).

ców. A zatem biorąc pod uwagę wymienione już powyżej założenie niezmiennej techniki produkcyjnej przyjmuje się w ciągu całej niniejszej pracy jak najdalej posuniętą niezmienność warunków produkcyjnych, w jakich pracuje dane przedsiębiorstwo.

Na zakończenie tych wstępnych uwag i przed przystąpieniem do właściwego tematu pracy chciałbym jeszcze poświęcić parę słów stronie metodologicznej mej pracy. Przyjmując, że koszty produkcji są funkcją ilości produkowanej, staram się na tej podstawie zbadać bliżej związki zachodzące między wielkością produkcji i kosztami. W tym celu pod ogólny wzór funkcji kosztów podstawiam pewne konkretne funkcje, odpowiadające tym cechom charakterystycznym, które w poszczególnych wypadkach przypisuję funkcji kosztów. Zdaję sobie sprawę z minusu, jakim to jest dla otrzymanych rezultatów. Wartość rezultatów otrzymanych przy operowaniu wyłącznie funkcjami ogólnemi, odpowiednio scharakteryzowanemi, byłaby, rzecz prosta, bez porównania większa. Wówczas jednak wykazanie zachodzących związków i przeprowadzenie odpowiednich dowodów byłoby bez porównania bardziej skomplikowane. Zamiarem moim jest powrócenie jeszcze do tematów poruszonych w niniejszej pracy i opracowanie ich w tej właśnie formie, lepszej z punktu widzenia metodologicznego. I metoda zastosowana w tej pracy posiada jednak pewne plusy, które są w stanie być może usprawiedliwić jej zastosowanie. Użycie konkretnych funkcyj unaocznia może lepiej w pewnych poszczególnych wypadkach zachodzące związki a pewne problemy (jak np. problem zysków i strat) oświetla bardziej wyraziście. Zresztą tak jak wykres jest ilustracją graficzną wywodów słownych, tak samo również można uważać za pewnego rodzaju ilustrację zastosowanie w poszczególnych wypadkach konkretnych funkcyj**.

Zawsze jest oczywiście lepiej posługiwać się lepszem narzędziem pracy niż gorszem. O ile jednak, dla takich czy innych względów, decydujemy się na użycie gorszego narzędzia, wówczas w znacznej mierze uniknie się niebezpieczeństw, płynących z jego niedoskonałości, jeżeli tylko zawsze pamiętać będziemy o jego wadach i wynikających z nich ograniczeniach co do zakresu stosowalności osiągniętych rezultatów.

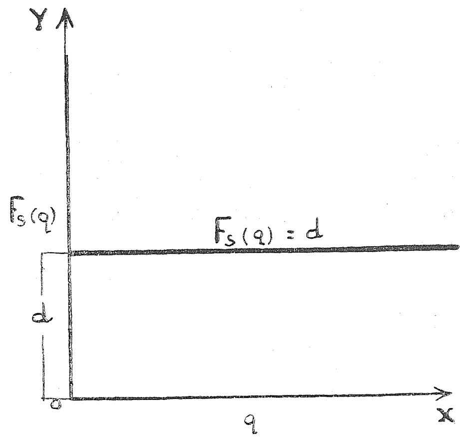
ROZDZIAŁ II.

Kategorje kosztów produkcji.

Pojęcie produkcji i pojęcie kosztów produkcji zostały już omówione w pierwszym rozdziale. Obecnie wypada zastanowić się nad tem z jakiego rodzaju kosztami produkcji możemy mieć do czynienia. Koszty produkcji możemy klasyfikować z różnych punktów widzenia. Różne mogą być klasyfikacje kosztów dla różnych celów, i tem samem różne mogą być kryterja, na podstawie których dana klasyfikacja zostaje dokonana. Jedynem kryterjum, na podstawie którego ogólne pojęcie kosztów produkcji zostanie rozbite na pewne poszczególne kategorje, będzie stosunek, jaki zachodzi między danego rodzaju kosztami a ilością fizycznych jednostek dobra, przy pomocy tych kosztów wyprodukowanego. Innemi słowami związek, istniejący między zachowaniem się kosztów produkcji i wielkością produkcji.

Przedewszystkiem jednak, zanim przystąpię do badania różnych rodzajów kosztów produkcji i ich opisu, należy wyjaśnić jedną kwestję. O kosztach produkcji można mówić w dwojakiem znaczeniu. Można mianowicie mówić o wszystkich kosztach produkcji w odniesieniu do całego volumen produkcji danego przedsiębiorstwa, lub też o kosztach produkcji, jakie przypadają na jedną jednostkę danej produkcji. Dla uniknięcia możliwych omyłek, mówiąc o kosztach w odniesieniu do całości produkcji, będę używał terminu suma kosztów. Mówiąc o kosztach w odniesieniu do jednej jednostki tej produkcji mogę mieć na myśli dwie rzeczy. Mogę mianowicie mieć na myśli średni koszt jednostkowy, który dla krótkości będę nazywał poprostu kosztem średnim. Koszt średni będzie to więc iloraz sumy kosztów przez ilość wyprodukowanych jednostek. Mówiąc o koszcie jednostkowym mogę mieć na myśli jeszcze co innego. Może mnie interesować kwestja przyrostu sumy kosztów, spowodowana przez powiększenie dotychczasowej produkcji o pewną dodatkową ilość, np. o jedną dodatkową jednostkę. Przyrost sumy kosztów, odpowiadający przyrostowi produkcji o tę jednostkę, będę nazywał kosztem granicznym lub krańcowym. W rozdziale niniejszym zostanie zbadana sprawa związków, jakie zachodzą między sumą kosztów i wielkością produkcji. Związki te mogą być następujące.

Przedewszystkiem mogą zachodzić wypadki, gdy związek ten w pewnych, dość szerokich granicach, wogóle nie istnieje. Zachodzi to w tych wszystkich wypadkach, gdy pewne koszty muszą być poniesione niezależnie od ilości wyprodukowanych jednostek. Jako ilustracja (przynajmniej w przybliżeniu) tego rodzaju kosztów mogą nam służyć następujące przykłady. Jeżeli ze stacji w Krakowie wyrusza pociąg do Warszawy, koszt jego przejazdu (a więc koszt obsługi, koszt materjału opałowego i t. p.) jest zupełnie niezależny od tego czy jedzie nim jeden pasażer, czy też pociąg jest wypełniony do ostatniego miejsca. Koszt urządzenia jednego przedstawienia teatralnego czy koncertu niema nic wspólnego z ilością widzów, znajdujących się na widowni. W wypadkach tych nie można oczywiście rozszerzać produkcji nieograniczenie, zupełnie niezależnie od sumy kosztów. Granicą będzie tu zawsze zdolność produkcyjna danego przedsiębiorstwa, a więc jak w podanych przykładach pojemność pociągu czy widowni. Graficzną ilustracją tego rodzaju kosztów jest wykres na rys. 2. Na osi x-ów oznaczone są ilości wyprodukowanych jednostek (np. pasażerów, przewiezionych danym pociągiem między Krakowem a Warszawą). Na osi y-ów oznaczona jest suma kosztów (np. koszt przejazdu tego pociągu). Ponieważ, stosownie do zrobionego założenia, ta suma kosztów jest niezależna od ilości wyprodukowanych jednostek, wykres sumy kosztów przedstawiony jako prosta równoległa do osi x-ów. Znaczy to, że suma kosztów pozostaje stale równa tej samej wielkości, oznaczonej symbolem d.



Rys. 2.

Jeżeli przez K_s oznaczę tego rodzaju koszty, a przez q ilość produkowanych jednostek, mogę wyrazić związek, zachodzący między temi wielkościami w ten sposób, że będę traktował koszty jako funkcję ilości produkowanych jednostek, więc mogę napisać

$$K_s = F_s(q).$$

W zastosowaniu do omawianego obecnie rodzaju kosztów będzie to funkcja stała:

$$F_s(q) = d.$$

Tak zdefinjowane koszty będę nazywał kosztami stałemi lub sumą kosztów stałą.

Drugi rodzaj sumy kosztów stanowią koszty, które są związane w pewien określony sposób z wielkością produkcji. Są one od niej uzależnione w ten sposób, że zmieniają się w tym samym kierunku co wielkość produkcji i w zależności od niej. Suma kosztów rośnie, gdy rośnie produkcja, a gdy produkcja maleje, suma kosztów maleje również. Tego rodzaju koszty będę nazywał kosztami zmiennemi lub sumą kosztów zmienną. Oczywiście samo stwierdzenie, że istnieją koszty, które zmieniają się w zależności od wielkości produkcji, jest to jeszcze zamało. Cały problem polega na tem, by stwierdzić, jak się one zmieniają, w jakim stosunku znajduje się ich wzrost lub spadek do wzrostu lub spadku produkcji. Z tego punktu widzenia możemy rozróżnić wśród kosztów zmiennych następujące kategorje.

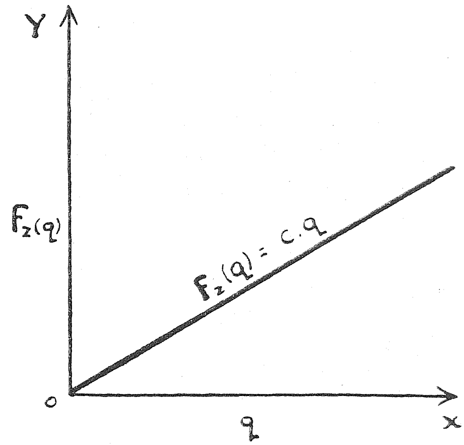
Związek, zachodzący między kosztami zmiennemi i wielkością produkcji, może być natury bardzo prostej. Weźmy np. pod uwagę produkcję drobnego rzemieślnika, powiedzmy szewca i jako koszty produkcji wytwarzanego przez niego dobra (butów) uznajmy tylko jego pracę i koszt nabycia surowca. Nie popełnimy wielkiego błędu, jeśli będziemy abstrahować od kosztu jego narzędzi produkcji. Jest ich tak niewiele i tak są mało skomplikowane, że możemy, narazie przynajmniej, uznać je za »quantité negligeable«. W takich warunkach zauważymy, że ów szewc, chcąc podwoić lub potroić ilość produkowanych przez siebie butów, musi odpowiednio podwoić, względnie potroić zarówno nakład swej pracy jak i ilość surowca. Jego suma kosztów produkcji wzrośnie więc w tym samym stosunku, co wzrosła ilość jednostek, produkowanego przez niego dobra. Graficzną ilustracją tego wypadku jest wykres na rys. 3 [1]. Wzrostowi produkcji towarzyszy równomierny wzrost sumy kosztów zmiennych. Równym przyrostom produkcji odpowiadają równe przyrosty kosztów. Innemi słowami wyprodukowanie każ-

---

[1] Jeżeli nie jest wyraźnie zaznaczone inaczej, na wszystkich wykresach niniejszej pracy ilości oznaczane są na osi x-ów, a koszty produkcji na osi y-ów. Nie będę więc już tego powtarzać przy każdym wykresie zosobna.

dej następnej jednostki kosztuje w tym wypadku to samo, co kosztowało wyprodukowanie poprzedniej. Wykres sumy kosztów zmiennych będzie w tym wypadku reprezentowany przez prostą, wychodzącą z początku układu współrzędnych i nachyloną do osi x-ów pod pewnym kątem.

Dla każdej ilości q suma kosztów zmiennych jest inna, a ponieważ z założenia te zmiany są proporcjonalne, zatem jeżeli q_2 jest dwa razy większe od q_1 to w takim razie (jeżeli symbolem K_z oznaczę sumę kosztów zmiennych), K_{z_2} będzie dwa razy większe od K_{z_1}.



Rys. 3.

W tym wypadku więc suma kosztów nie będzie już, jak w wypadku poprzednim, niezależna od ilości wyprodukowanej, ale będzie z nią ściśle związana. Nie będzie to więc już funkcja stała, lecz zmienna (a mianowicie wzrastająca), a ponieważ wzrost jej będzie proporcjonalny do wzrostu q możemy więc napisać, że w tym wypadku, jeżeli $K_z = F_z(q)$ to:

$$F_z(q) = cq.$$

Tego rodzaju koszty będę nazywać sumą kosztów, zmienną wprost proporcjonalnie.

Związki, zachodzące między sumą kosztów zmiennych a wielkością produkcji, mogą być i przeważnie bywają natury bardziej skomplikowanej. Będzie to miało miejsce wówczas, jeżeli zmianom w wielkości produkcji towarzyszyć będą zmiany sumy kosztów inne niż proporcjonalne. Na przykład możemy wyobrazić sobie wypadek, gdy dla każdego powiększenia produkcji musimy ponosić coraz to większe koszty. Równym przyrostom produkcji będą wówczas odpowiadały coraz to zwiększające się przyrosty sumy kosztów zmiennych. Będzie to oznaczało, że wyprodukowanie każdej następnej jednostki będzie kosztowało więcej niż każdej poprzedniej. Znalezienie praktycznego przykładu na tego rodzaju koszty zmienne, że od p i e r w s z e j jednostki począwszy, dla wyprodukowania każdej następnej trzeba ponosić coraz wyższe nakłady, nie jest łatwe. Narazie chodzi mi tylko o scharakteryzowanie różnych rodzajów kosztów.

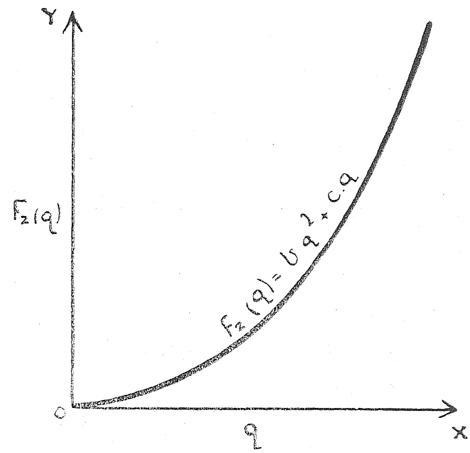
Jeśli będziemy chcieli przedstawić graficznie tego rodzaju wypadek, to otrzymamy wykres już nie prostej ale krzywej rosnącej i to rosnącej coraz szybciej (patrz rys. 4). Przebieg tej krzywej kosztów oddaje dokładnie to wszystko, co zostało powiedziane o cechach charakterystycznych tego rodzaju kosztów. Widzimy z niej dokładnie, że np. podwojenie produkcji pociągnie za sobą zwyżkę sumy kosztów o więcej niż o sto procent.

Jeżeli znowu przyjmiemy koszty zmienne za funkcję wielkości produkcji, czyli $K_z = F(q)$, to obecnie funkcja ta będzie już wzrastała nieproporcjonalnie, lecz więcej niż proporcjonalnie. W tym wypadku więc:

$$F(q) = bq^2 + cq.$$

Koszty, reprezentowane przez tę funkcję, będą zatem kosztami zmiennemi, wzrastającemi więcej niż proporcjonalne. Wzór powyższy jest bardziej skomplikowany od poprzedniego, albowiem występują w nim dwa, różnorodne elementy kosztów. Jeden, znany nam już z wzoru na zmienną sumę kosztów, wzrastającą proporcjonalnie, $c \cdot q$, oraz drugi, nowy $b \cdot q^2$. Ten znany element reprezentuje zmienną sumę kosztów, wzrastającą proporcjonalnie, a więc możemy go nazwać elementem obojętnym, gdyż nie stanowi on ani zachęty do rozszerzania produkcji, ani nie wpływa na jej ograniczenie. Nowo wprowadzony element natomiast reprezentuje zmienną sumę kosztów, wzrastającą więcej niż proporcjonalnie, a więc nie jest on już elementem obojętnym lecz przeciwnie: ponieważ wpływa on na więcej niż proporcjonalną zwyżkę kosztów, stanowi on element hamujący, przeszkadzający rozszerzaniu produkcji poza pewne granice.

Najbardziej skomplikowym, ale i najbardziej interesującym, a zarazem, mam wrażenie, najpowszechniejszym wypadkiem jest ten, gdy suma kosztów zmiennych zmienia się w zależności od wielkości produkcji tak, że początkowo wzrasta mniej niż proporcjonalnie aż do pewnego punktu, poczem, od tego właśnie punktu począwszy, zaczyna wzrastać więcej niż proporcjonalnie. Znaczy to, że z chwilą rozpoczęcia produkcji każdy kolejny przyrost ilości produkowanej będzie powodował coraz to mniejsze przyrosty sumy kosztów zmiennych. Te stopniowo zmniejszające się przyrosty kosztów będą najniższe dla pewnego skolei przyrostu produkcji, czyli osiągną wówczas swoje minimum. Począwszy od tego punktu te przyrosty kosztów poczną wzrastać dla dalszego powiększania produkcji i to wzrastać coraz szybciej. Inaczej można to wyrazić w ten sposób, że początkowo wyprodukowanie każdej następnej jednostki będzie kosztowało mniej niż wynosiły koszty produkcji poprzedniej. W pewnym punkcie, czyli dla pewnej określonej ilości wyprodukowanej, wyprodukowanie jeszcze jednej jednostki pociągnie za sobą stosunkowo najmniejszy przyrost kosztów, czyli koszt produkcji tej ostatniej jednostki będzie stosunkowo najniższy. Od tego zaś punktu począwszy, koszt produkcji każdej następnej dodatkowej jednostki będzie coraz wyższy [1]. Jakie odpowiedniki tego rodzaju zmiennej sumy kosztów możemy znaleść w praktyce? Jeżeli jakiś zakład przemysłowy produkuje tylko w drobnej części swej zdolności wytwórczej, to przy powiększeniu swej aktualnej produkcji o, powiedzmy, dwadzieścia pięć procent, musi wprawdzie zostać nabyte o dwadzieścia pięć procent więcej surowca, ale prawdopodobnie nie trzeba będzie zatrudniać również o dwadzieścia pięć procent więcej robotników. Może wystarczy powiększyć ich ilość tylko o dziesięć procent! Ogólna suma przyrostu kosztów zmiennych będzie więc niższa niż dwadzieścia pięć procent. Tego rodzaju stan rzeczy może występować przy powiększaniu ilości produkowanej, ale tylko do pewnej granicy. Gdyby tej granicy nie było, wówczas zamiast budować nową fabrykę produkującą to samo dobro, wystarczyłoby rozszerzać coraz bardziej produkcję już istniejącej fabryki.



Rys. 4.

Przykłady tego rodzaju struktury zmiennej sumy kosztów mo-

[1] Jakkolwiek szczegółowe omówienie tej kwestji pozostawiam do Rozdziału IV, chciałbym odrazu zaznaczyć, że problemu najniższego przyrostu sumy kosztów nie należy mylić z problemem najniższego średniego kosztu na jednostkę gdyż problemy te są zupełnie różne.

żemy znaleść również w produkcji rolnej. Jeżeli wezmę kilka kawałków gruntu takiej samej jakości i dla uprawy jednego z nich poniosę pewne nakłady kosztów w wysokości np. dziesięć (dni pracy, lub złotych, lub t. p.), dla uprawy drugiego w wysokości dwudziestu, trzeciego trzydziestu i t. d., wówczas może się okazać, że zbiory z gruntu numer dwa w fizycznych jednostkach danego dobra (np. metrów pszenicy) przewyższą zbiory z gruntu numer jeden więcej niż dwukrotnie, a zbiory z gruntu numer trzy przewyższą zbiory z gruntu numer dwa więcej niż o pięćdziesiąt procent. Ale zbiory z gruntu numer cztery nie będą już prawdopodobnie wyższe o trzydzieści trzy i jedną trzecią procentu od zbiorów z gruntu numer trzy, lecz może tylko o dwadzieścia procent, a zbiory z gruntu numer pięć nie będą wyższe od zbiorów z gruntu numer cztery o dwadzieścia pięć procent, lecz może tylko o dziesięć procent. Gdyby było inaczej bowiem, to i w wypadku produkcji rolnej nie potrzebowałbym brać pod uprawę większej ilości gruntów, tylko rozszerzałbym ciągle produkcję na jednym i tym samym gruncie. I tu również istnieje jednak pewna granica, od której począwszy następne kolejne nakłady kapitału i pracy, czyli kosztów, zaczynają dawać coraz mniejsze rezultaty. Znaczy to, że wyprodukowanie pewnej kolejnej jednostki będzie pociągało za sobą stosunkowo najmniejszy nakład kosztów w stosunku do jednostek poprzednich i następnych.

Jeżeli chcielibyśmy przedstawić graficznie tego rodzaju funkcję sumy kosztów zmiennych to otrzymamy wykres, przedstawiony na rys. 5. Na wykresie tym widzimy, że kolejne powiększanie produkowanej ilości o równe porcje będzie pociągało za sobą nierównomierne powiększanie sumy kosztów zmiennych. Innemi słowami, równe przyrosty produkcji wywołują nieproporcjonalne przyrosty sumy kosztów zmiennych.

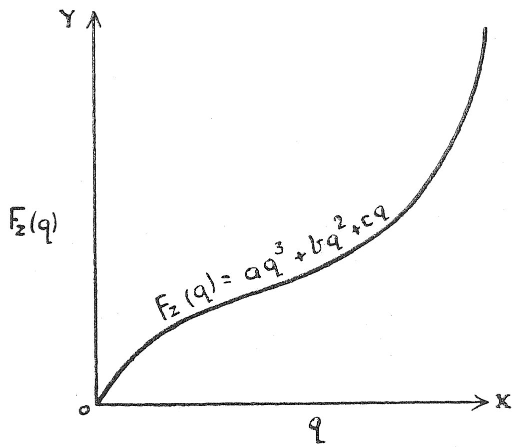
W tym wypadku więc suma kosztów zmiennych K_z jako funkcja ilości produkowanej, będzie wzrastać początkowo mniej, a później więcej niż proporcjonalnie, a więc

$$F_z(q) = aq^3 + bq^2 + cq.$$

Aby funkcja, będąca obrazem podanego powyżej wzoru, miała istotnie przebieg taki jak na wykresie na rys. 5, współczynnik stały przy niewiadomej w drugiej potędze, a więc w tym wypadku b, musi być ujemny, a więc musi być spełniony warunek

$$b < 0.$$

Tylko, jeżeli ten warunek będzie spełniony, przegięcie krzywej, wskazujące nam punkt, w którym kończą się malejące przyrosty kosztów (na każdą kolejną, dodatkowo wyprodukowaną jednostkę), a zaczynają się wzrastające przyrosty kosztów, wypadnie w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.



Rys. 5.

Tak zmieniającą się sumę kosztów zmiennych, która wzrasta początkowo mniej, a później więcej niż proporcjonalnie w stosunku do równych przyrostów produkcji, będę nazywać krótko kosztami nieproporcjonalnemi.

We wzorze funkcji tej ostatnio omówionej kategorji kosztów znajdujemy trzy elementy, a mianowicie aq^3, bq^2, oraz cq. Jaką jest ich rola? Element cq nie nastręcza wątpliwości. Jest to ten sam, dwukrotnie już przez nas spotkany, element obojętny. Element bq^2 w obecnie omawianym wzorze odgrywa zupełnie inną rolę niż w poprzednim. Wówczas był on elementem hamującym rozszerzanie produkcji, wpływał bowiem na więcej niż proporcjonalny wzrost kosztów. Obecnie tę rolę spełnia nowowprowadzony element aq^3. Dla kosztów nieproporcjonalnych zatem aq^3 jest elementem hamującym rozszerzanie produkcji, bq^2 natomiast, ponieważ w ostatnio podanym wzorze b, w przeciwieństwie do wzoru poprzedniego, jest ujemne, spełnia obecnie rolę elementu ułatwiającgo rozszerzanie produkcji, bq^2 bowiem ogranicza szybkość wzrostu zmiennej sumy kosztów. Dopóki przeważają wpływy elementu ułatwiającego rozszerzanie produkcji, dopóty suma kosztów produkcji wzrasta mniej niż proporcjonalnie, z chwilą zaś gdy przewagę uzyskują wpływy elementu hamującego, rozszerzanie produkcji, wówczas suma kosztów poczyna wzrastać więcej niż proporcjonalnie.

Te zatem, wymienione w poprzednim paragrafie, cztery zasadnicze kategorje kosztów produkcji możemy rozróżnić według związku, zachodzącego między niemi a wielkością produkcji. Te cztery kategorje dzielą się na dwie zasadnicze grupy, a mianowicie na koszty stałe (zwane także niekiedy kosztami generalnemi) oraz na koszty zmienne (zwane niekiedy kosztami specjalnemi). Wśród tych ostatnich znowu zostały wyróżnione różne ich typy w zależności od tego, w jaki sposób się one zmieniają w zależności od zmian w wielkości produkcji. Oczywiście wypadki, w których mają miejsce tylko koszty stałe albo tylko koszty zmienne, albo wogóle nie zachodzą, albo są tak wyjątkowe i rzadkie, że nie odgrywają większej roli. Najczęstszym jest wypadek, gdy mamy do czynienia z kombinacją kosztów zmiennych i kosztów stałych. Bywa tylko, rzecz prosta, różny udział kosztów stałych i kosztów zmiennych w różnych wypadkach, co pociąga za sobą pewne konsekwencje, o których będzie jeszcze mowa.

Jaki wpływ na kształtowanie się sumy kosztów pociąga za sobą uwzględnienie prócz kosztów zmiennych także i kosztów stałych? Czem będzie się różnić funkcja kosztów całkowitych od funkcji kosztów zmiennych? Koszty całkowite równają się kosztom zmiennym plus koszty stałe, a więc:

$$F(q) = F_s(q) + F_z(q)$$

ale wiemy, że koszty stałe są niezależne od ilości produkowanej, czyli funkcja kosztów stałych jest stałą, równą zawsze tej samej wartości, t. zn., jak już o tem była mowa powyżej:

$$F_s(q) = d$$

przyczem symbolem d oznaczona jest pewna wielkość niezmienna.

$$F(q) = F_z(q) + d.$$

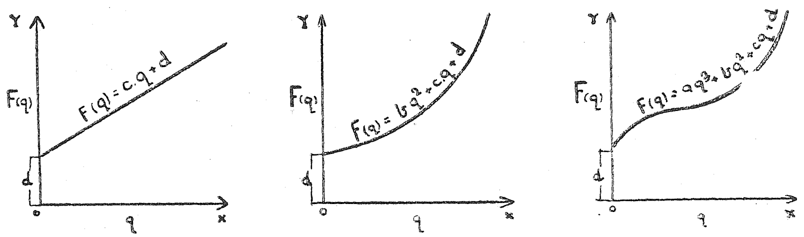
Jak to już było kilkakrotnie zaznaczone, koszty stałe są niezależne od wielkości produkcji. Oznacza to, że jeżeli nawet q, czyli ilość produkowana równa się zeru, to w prawdzie koszty zmienne będą się równały zeru, czyli:

jeżeli będzie zachodziło $q = 0$, to wówczas będzie zachodziło $F_z(q) = 0$

ale koszty stałe zawsze trzeba będzie ponosić, nawet i w tym wypadku a więc

jeżeli będzie zachodziło $F_z(q) = 0$, to wówczas będzie zachodziło $F(q) = d$.

W zastosowaniu do podanych poprzednio wzorów, które możemy zastosować do matematycznego określenia poszczególnych kategoryj kosztów zmiennych, wprowadzenie do nich kosztów stałych będzie polegało poprostu na dodaniu do nich t. zw. wyrazu



Rys. 6.

wolnego, czyli wyrazu bez niewiadomej, a więc wzór na koszty całkowite, o kosztach zmiennych wzrastających nieproporcjonalnie w stosunku do ilości produkowanej będzie teraz wyglądał:

$$F(q) = cq + d.$$

Wzór na koszty całkowite o kosztach zmiennych więcej niż proporcjonalnych jest:

$$F(q) = bq^2 + cq + d.$$

I wreszcie wzór na koszty całkowite o kosztach zmiennych nieproporcjonalnych:

$$F(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d.$$

Przedstawienia graficzne tych trzech rodzajów kosztów całkowitych będą się różniły od wykresów, przedstawionych na rys. 3, rys. 4. oraz na rys. 5 tylko tem, że wykresy ich będą przesunięte ku górze wzdłuż osi y-ów właśnie o wartość wyrazu wolnego, czyli d. Miejsce przecięcia wykresu funkcji kosztów całkowitych z osią y-ów oznacza bowiem koszty, jakie muszą być poniesione nawet w tym wypadku gdy się nic nie produkuje, a więc gdy $q = 0$. Pozatem wykresy funkcji kosztów będą przebiegały bez żadnych zmian. Będą one wyglądały tak, jak to przedstawiono dla wszystkich tych trzech kategoryj kosztów całkowitych na rys. 6.

ROZDZIAŁ III

Sredni koszt jednostkowy.

Dotychczas mowa była wyłącznie o związkach, zachodzących między sumą kosztów i całością produkcji w zależności od wielkości tej produkcji. Teraz należy skolei omówić związki, jakie zachodzą między kosztami, przypadającemi na jedną jednostkę, w zależności od tego, ile tych jednostek zostało wyprodukowanych, a więc związek między średniemi kosztami jednostkowemi a wielkością produkcji. Te koszty, które nazywać będę krótko kosztami średniemi, można badać zarówno w odniesieniu do kosztów stałych, do kosztów zmiennych jak i wreszcie w odniesieniu do kombinacji tych kosztów, czyli do kosztów całkowitych.

Koszty średnie zostały powyżej zdefinjowane jako iloraz sumy kosztów przez ilość wyprodukowanych jednostek czyli, jeżeli przez k oznaczę średnie koszty jednostkowe, mogę napisać:

$$k = \frac{F(q)}{q} = f(q).$$

Najogólniejsza graficzna ilustracja średniego kosztu jednostkowego podana jest na rys. 7.

Ilość produkowana, czyli q reprezentowana jest na wykresie przez odciętą punktu B, a więc przez odcinek OA. Suma kosztów produkcji dla tej ilości reprezentowana jest przez rzędną punktu B, czyli przez odcinek AB. Średni koszt jednostkowy równa się zatem stosunkowi rzędnej do odciętej czyli:

$$k = \frac{AB}{OA}.$$

Połączmy teraz punkt B na krzywej z początkiem układu współrzędnych. Otrzymamy trójkąt prostokątny OAB. Kąt, utworzony przez prostą OB, łączącą początek układu z punktem B, oraz oś x-ów, nazwijmy α. Odcięta AB jest zatem przyprostokątną przeciwległą, a rzędna OA przyprostokątną przyległą, ich stosunek zatem:

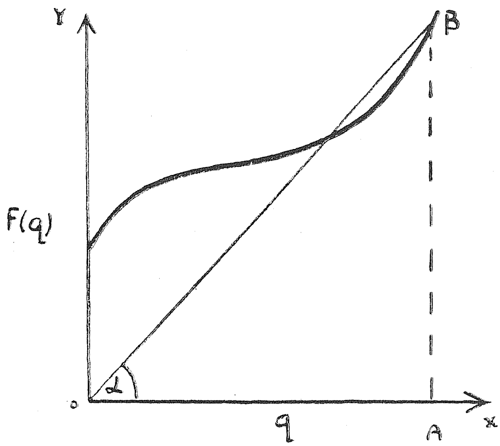
$$k = \frac{AB}{OA} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Zachowanie się tangensa kąta α reprezentuje więc zachowanie się jednostkowego kosztu średniego.

Wykres na rys. 7 przedstawia sumę kosztów nieproporcjonalną, ale oczywiście samą graficzną konstrukcję kosztu średniego można równie dobrze zastosować dla wykresu każdego rodzaju kosztów.

Po tych ogólnych uwagach wróćmy teraz do funkcji jednostkowego kosztu średniego i zastosowania jej wzoru do poszczególnych kategoryj kosztów.

Jaki wynik otrzymamy stosując ten wzrór do kosztów stałych? Związek, jaki zachodzi między średniemi kosztami jednostkowemi a ilością wyprodukowaną w wypadku, gdy koszty całkowite składają się wyłącznie z kosztów stałych, jest bardzo prosty. Co to znaczy, że suma kosztów jest stałą? Znaczy to, że dla wyprodukowania każdej dodatkowej jednostki nie potrzeba ponosić żadnych dodatkowych kosztów. Odrazu »na oko« można się domyślić, że im większą będzie ilość produkowana, tem mniejszy



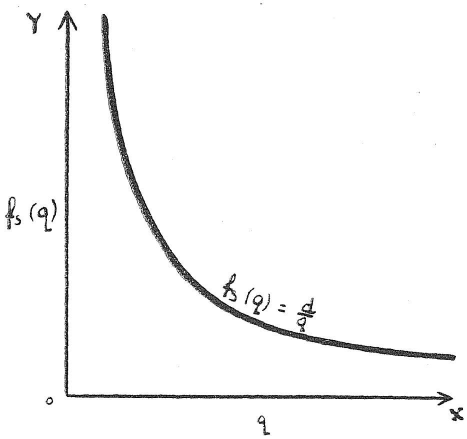
Rys. 7.

wypadnie średni koszt na jednostkę i dalej, możemy nawet odrazu przewidzieć w jaki sposób, w jakim stopniu ten koszt średni będzie się obniżać. A mianowicie, ilokrotnie wzrośnie ilość produkowana, tylokrotnie musi zmaleć koszt średni. Innemi słowami, związek między kosztem średnim a wielkością produkcji będzie odwrotnie proporcjonalny. Ten ostatni fakt może być przesłanką dla jednego bardzo ważnego wniosku, a mianowicie, że tego rodzaju struktura kosztów staje się zachętą dla jak największego rozszerzania produkcji. Oznaczmy przez k_s średni koszt jednostkowy. Będzie się on równał ilorazowi kosztów stałych przez ilość produkowaną, a więc

$$k_s = f_s(q) = \frac{F_s(q)}{q} = \frac{d}{q}.$$

Graficzną ilustracją tej funkcji jest wykres na rys. 8. Jej cechą charakterystyczną jest, że dla każdego punktu, położonego na krzywej, będącej jej wykresem, iloczyn rzędnej tego punktu przez jego odciętą jest wielkością stałą. Iloczyn ten zaś w naszej interpretacji jest to właśnie stała suma kosztów. Wykres ten ilustruje jasno omawiany już poprzednio fakt, że dwukrotne naprzykład powiększenie produkcji powoduje obniżkę kosztu średniego do połowy.

Krzywa tego rodzaju, jak przedstawiona na wykresie, jest to hyperbola równoboczna, której asymptotami są osie układu współrzędnych.



Rys. 9.

Widzimy zatem, że jeżeli mamy do czynienia z wypadkiem sumy kosztów stałej w stosunku do ilości produkowanej, to wówczas z punktu widzenia kosztów średniej zachodzi wypadek kosztów średnich zmiennych a mianowicie odwrotnie proporcjonalnych w stosunku do ilości produkowanej.

Rozpatrzmy teraz zachowanie się średnich kosztów jednostkowych w wypadku sumy kosztów zmiennej w zależności od wielkości produkcji. Tak jak poprzednio rozróżnione zostały trzy kategorje zmiennej sumy kosztów, tak samo obecnie otrzymamy trzy kategorje odpowiadających im kosztów średnich. Oznaczmy je ogólnie symbolem k_z. Możemy napisać analogicznie jak w ostatnio rozpatrywanym wypadku:

$$k_z = \frac{F_z(q)}{q} = f_z(q).$$

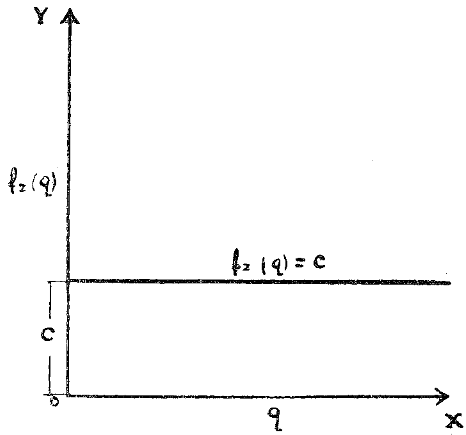
Pierwszym jest wypadek, gdy zmienna suma kosztów wzrasta wprost proporcjonalnie w stosunku do wielkości produkcji. W tym wypadku również można zgóry przewidzieć kształtowanie się kosztów średnich. Jeżeli mianowicie zmienna suma kosztów wzrasta wprost proporcjonalnie do wzrostu produkcji, to oznacza to, że ilokrotnie zostanie powiększona produkcja, tylokrotnie musi wzrosnąć suma kosztów, czyli, innemi słowami, że koszt wyprodukowania każdej następnej jednostki wynosi tyle, ile wynosił koszt wyprodukowania poprzedniej. Jeżeli zaś przy powiększaniu produkcji, koszt wyprodukowania każdej następnej jednostki jest taki sam, to wówczas średni koszt na jednostkę musi pozostać niezależny od tego, ile tych jednostek jest produkowanych, czyli musi pozostać wielkością stałą.

Jak wiemy sumę kosztów, wzrastającą wprost proporcjonalnie do wzrostu ilości produkowanej, możemy przedstawić w formie następującej funkcji:

$$F_z(q) = c \cdot q.$$

Funkcja jednostkowych kosztów średnich, wyprowadzona z powyższego wzroru będzie miała postać następującą:

$$f_z(q) = \frac{F_z(q)}{q} = \frac{c \cdot q}{q} = c.$$



Rys. 9.

Ilustracją graficzną tej funkcji jest wykres na rys. 9. Wykres ten jest linją prostą, równoległą do osi x-ów, co wskazuje na to, że wartość tej funkcji jest w każdym punkcie stałą, t. zn., że jest niezależna od wartości przyjętej dla zmiennej niezależnej. Sens ekonomiczny tego wykresu jest ten, że, jak już o tem była mowa powyżej, wielkość średniego kosztu na jednostkę jest w tym wypadku niezależna od ilości wyprodukowanych jednostek i dla każdej ich ilości jest taka sama.

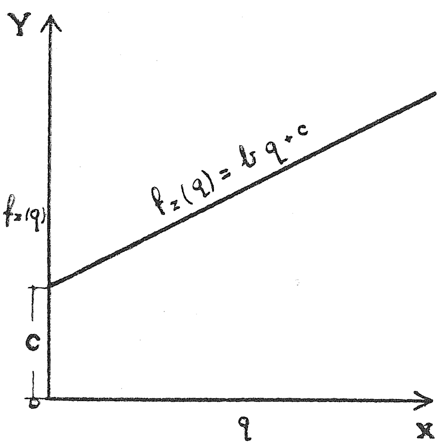
Dla zmiennej sumy kosztów, wzrastającej wprost proporcjonalnie, średni koszt na jednostkę jest zatem wielkością s t a ł ą.

Inaczej zawsze będzie się przedstawiać przebieg kosztów średnich wówczas gdy mamy do czynienia z wzrostem zmiennej sumy kosztów więcej niż proporcjonalnym. Wypadek ten oznacza, że dwukrotne np. zwiększenie produkcji musi wywołać więcej niż dwukrotne zwiększenie zmiennej sumy kosztów. A zatem od piewszej chwili rozpoczęcia produkcji, dodatkowy koszt, jaki musi być poniesiony dla wyprodukowania każdej dodatkowej jednostki, będzie większy niż dodatkowy koszt, jaki pociągało za sobą wyprodukowanie jednostki poprzedniej. Już z tego można się również domyśleć, że średni koszt jednostkowy będzie w tym wypadku uzależniony od wielkości produkcji i to w ten sposób mianowicie, że w miarę wzrostu produkcji będzie on wzrastał również. Ale oczywiście interesuje nas jeszcze pytanie jak będzie wzrastał? Wzór na średni koszt jednostkowy przy zmiennej sumie kosztów, wzrastającej więcej niż proporcjonalnie, otrzymać możemy analogicznie jak dla wypadków, omówionych powyżej, a więc:

$$f_z(q) = \frac{F_z(q)}{q} = \frac{bq^2 + cq}{q} = bq + c.$$

Graficzną ilustracją tej funkcji średnich kosztów na jednostkę jest wykres na rys 10.

Gdy obserwujemy podany ostatnio wzór oraz jego wykres uderza nas jedno, a mianowicie co oznacza wielkość c? Na pierwszy rzut oka można sądzić, że będzie to wartość funkcji $f_z(q)$ dla $q = 0$. Ale czemuż może się równać średni koszt jednostkowy dla produkcji równej zeru? W tym wypadku oznaczałoby to, że dla produkcji równej zeru średni koszt jednostkowy wynosi c. W dodatku z wzoru na zmienną sumę kosztów widzimy, że przy produkcji równej zeru zmienna suma kosztów również równa się zeru. Jak pogodzić ze sobą te dwie sprzeczności? Otóż przedewszystkiem należy pamiętać o zastrzeżeniu, że wzór na średnie koszty jednostkowe możemy wyprowadzić jedynie dla $q > 0$, a że dla $q = 0$ cała procedura przejścia od jednego wzoru do drugiego jest niedopuszczalna, a więc, że niema sensu stosowanie wzoru na średni koszt jednostkowy w wypadku $q = 0$. Niemniej jednak fakt pozostaje faktem, że prosta będąca obrazem przebiegu tej funkcji jest na całej przestrzeni swego przebiegu przesunięta wgórę właśnie o tę wielkość c. Musimy ją więc jakoś zinterpretować i możemy to uczynić określając c, jako »zgrubsza« ten koszt, który musi być poniesiony, gdy przystępujemy do wyprodukowania pierwszej jed-



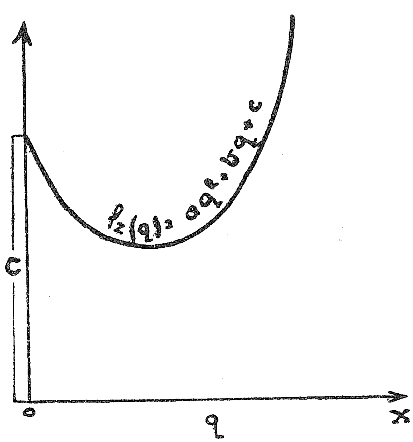
Rys. 10.

nostki i który potem wchodzi niezmiennie w skład średniego kosztu niezależnie od ilości produkowanej, c jest więc tym elementem obojętnym, który nie zmienia się w zależności od wielkości produkcji. Element bq jest tym, który powoduje stały i, jak w tym wypadku, proporcjonalny w stosunku do wielkości produkcji wzrost średniego kosztu jednostkowego, jak to ilustruje wykres na rys. 10.

Pozostała jeszcze do rozpatrzenia kwestja średnich kosztów jednostkowych w wypadku zmiennej sumy kosztów, wzrastającej nieproporcjonalnie. Koszty tego rodzaju, jak była już o tem mowa, mają dwie zasadnicze fazy, a mianowicie fazę początkową, gdy wzrastają mniej niż proporcjonalnie w stosunku do wielkości produkcji i fazę następną, gdy wzrost ten jest więcej niż proporcjonalny.

Kwestję dokładnego ustalenia związku między kosztem średnim a temi dwoma fazami sumy kosztów, pozostawiam do omówienia w rozdziale V. W tej chwili wystarczy ogólne stwierdzenie, że, ponieważ przyrosty kosztów, spowodowane powiększaniem produkcji, będą początkowo zmniejszające się (w pierwszej fazie), a następnie wzrastające (w drugiej fazie), więc koszt średni na jednostkę będzie się zachowywał analogicznie i również początkowo będzie malał, a od pewnego punktu zacznie wzrastać. Dokładne oznaczenie tego punktu i jego określenie pozostawiam również do rozdziału V. Wzór dla tego wypadku zmiennej sumy kosztów będzie:

$$f_z(q) = \frac{F_z(q)}{q} = \frac{aq^3 + bq^2 + cq}{q} = aq^2 + bq + c.$$



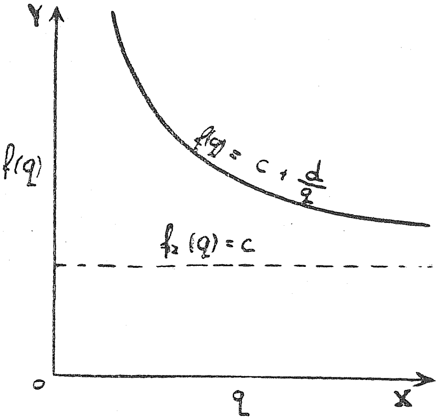
Rys. 11.

Graficzną ilustracją tego rodzaju funkcji kosztów jest wykres na rys. 11. Wykres ten jest to parabola o osi równoległej do osi y-ów i odsuniętej od niej w prawo. Parabola ta styka się z osią y-ów powyżej osi x-ów o wielkość c, której sens został już wyjaśniony poprzednio. Parabola ta nie przecina, ani nawet nie styka się z osią x-ów. Przebiega ponad nią gdyż średni koszt nawet w najniższym swoim punkcie musi być jakąś pozytywną wielkością. Oznacza to, że podane równanie jednostkowego kosztu średniego nie może posiadać pierwiastków rzeczywistych, czyli musi zachodzić warunek:

$$b^2 < 4ac.$$

Na wykresie tym widzimy, że, zgodnie z tem co powiedziano wyżej, koszt średni będzie malał w miarę rozszerzania produkcji, aż do pewnego punktu, w którym osiągnie swoje minimum, poczem zacznie wzrastać.

Analogicznie, jak dla funkcji zmiennej sumy kosztów, z której została wyprowadzona omawiana obecnie funkcja kosztu średniego i analogicznie jak w wypadku poprzednim możemy zinterpretować elementy wchodzące w skład wzoru tej funkcji w sposób następujący: aq^2 reprezentuje te czynniki, które powodują **wzrost** kosztu średniego w miarę rozszerzania produkcji, a więc aq^2 można nazwać elementem hamującym rozszerzanie produkcji, bq w tym wypadku reprezentuje te czynniki, które powodują **obniżkę** kosztu średniego w miarę rozszerzania produkcji. (Przypominam, że w rozpatrywanym obecnie wypadku b jest ujemne), bq można więc nazwać elementem sprzyjającym rozszerzaniu produkcji. c, jak zawsze tak i w tym wypadku, jest elementem obojętnym.



Rys. 12.

Dotychczas koszty średnie były rozpatrywane albo w stosunku do stałej sumy kosztów albo w stosunku do różnych rodzajów zmiennej sumy kosztów. Obecnie przystępuję do rozpatrzenia tej samej kwestji w stosunku do całkowitej sumy kosztów. Innemi słowami, do rozpatrzenia jaki wpływ na przebieg kosztów średnich wywrze uwzględnienie stałej sumy kosztów.

Całkowita suma kosztów, jak już była o tem mowa w poprzednim rozdziale, składa się z dwóch elementów, a mianowicie z elementu zmiennego i elementu stałego, co było wyrażone w sposób następujący:

$$F(q) = F_z(q) + d.$$

Ogólny wzór na całkowity średni koszt jednostkowy jest zatem:

$$k = \frac{F(q)}{q} = \frac{F_z(q)}{q} + \frac{d}{q}$$

co można również przedstawić w formie:

$$f(q) = f_z(q) + \frac{d}{q}.$$

Z tego ostatniego sformułowania możemy wysnuć wniosek, że im bardziej wzrasta ilość produkowana, czyli q, tembardziej maleje wyrażenie $\frac{d}{q}$, a więc w konsekwencji tego faktu, tem bardziej maleje różnica między całkowitym kosztem średnim, oznaczonym przez $k = f(q)$, a zmiennym kosztem średnim, oznaczonym przez $k_z = f_z(q)$. Możemy wyrazić to krótko w sposób następujący:

$$\text{gdy} \quad q \to \infty \quad \text{to wówczas} \quad f(q) \to f_z(q).$$

Dla kosztów całkowitych o zmiennej sumie kosztów, rosnącej wprost proporcjonalnie do wzrostu ilości produkowanej, koszt średni będzie się równał:

$$f(q) = \frac{c \cdot q + d}{q} = c + \frac{d}{q}.$$

We wzorze tym wyraz c reprezentuje koszt średni bez uwzględnienia kosztów stałych (w tym wypadku jest on wielkością stałą). Wyrażenie $\frac{d}{q}$ będzie maleć w miarę wzrostu q. Konsekwencje tego faktu możemy wyrazić w następujący sposób:

$$\text{gdy} \quad q \to \infty \quad \text{to wówczas} \quad c + \frac{d}{q} \to c.$$

Ilustracją graficzną tego rodzaju funkcji całkowitych kosztów średnich na jednostkę jest wykres na rys. 12.

Wykres ten przedstawia hyperbolę, której jedną asymptotą jest oś y-ów, a drugą, zaznaczony linją kreskowaną, wykres kosztów średnich, obliczony bez uwzględnienia stałej sumy kosztów i będący w tym wypadku linją prostą, równoległą do osi x-ów. Porównując oba te wykresy, a mianowicie wykres ciągły i wykres kreskowany, widzimy różnicę w przebiegu kosztu średniego w zależności od tego, czy przy obliczaniu go uwzględniamy całkowitą sumę kosztów (t. znaczy stałą plus zmienną) czy też tylko zmienną.

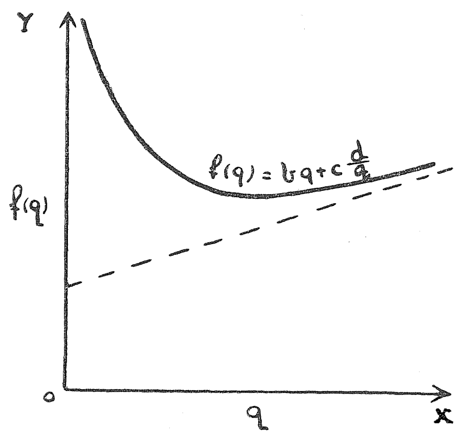
Analogicznie możemy wyprowadzić wzór na całkowity średni koszt jednostkowy w wypadku, gdy zmienna suma kosztów wzrasta więcej niż proporcjonalnie. Podstawiając we wzorze ogólnym wzór na tę kategorję kosztów otrzymamy:

$$f(q) = \frac{F(q)}{q} = \frac{bq^2 + cq + d}{q}$$
$$= bq + c + \frac{d}{q}.$$

Analogicznie również możemy napisać:

$$\text{gdy} \quad q \rightarrow \infty \quad \text{to wówczas} \quad bq + c + \frac{d}{q} \rightarrow bq + c.$$

Wykres na rys. 13 jest graficzną ilustracją tej funkcji. Wykres ten jest to krzywa hyperboliczna, której jedną asymptotą jest oś y-ów, a drugą, tak samo jak w poprzednim wypadku, kreskowaną linją zaznaczony wykres kosztów średnich bez uwzględnienia stałej sumy kosztów.



Rys. 13.

Dalsze uwagi na temat tego wykresu są zupełnie analogiczne, jak przy wykresie poprzednim, nie będę ich więc powtarzać.

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę ostatni wypadek, a mianowicie ten, w którym w skład całkowitej sumy kosztów wchodzi zmienna suma kosztów wzrastająca nieproporcjonalnie, średni koszt jednostkowy będzie wówczas:

$$f(q) = \frac{F(q)}{q} = \frac{aq^3 + bq^2 + cq + d}{q}$$
$$= aq^2 + bq + c + \frac{d}{q}.$$

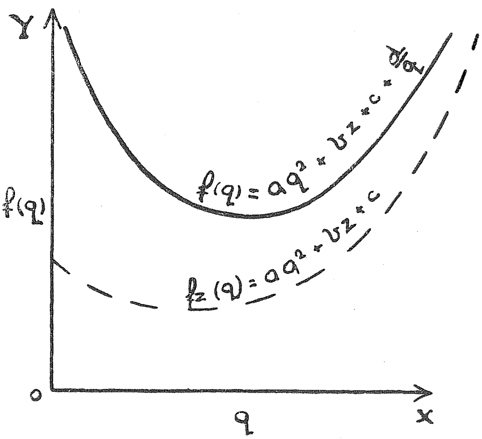
W tym wypadku oczywiście również możemy napisać:

gdy $q \to \infty$ to wówczas $aq^2 + bq + c + \frac{d}{q} \to aq^2 + bq + c$.

Wykres tej funkcji jest również krzywą hyperboliczną, ale inną niż na rys. 13. Jest on przedstawiony na rys. 14.

Jedną asymptotą tej krzywej jest oś y-ów, drugą zaś wznosząca się gałąź hyperboli (zaznaczona na wykresie kreskowaną linją) będącej wykresem kosztów średnich bez uwzględnienia stałej sumy kosztów. Dalsze uwagi są znowu analogiczne jak w obu poprzednich wypadkach.

Obecnie możemy się dokładnie zorjentować w roli, jaką w strukturze kosztów odgrywa ta kategorja kosztów, która w rozdziale II została nazwana stałą sumą kosztów. Jej cechą charakterystyczną jest to, że jest ona niezależna od wielkości produkcji. Stała suma kosztów raz poniesiona pozostaje już niezmieniona, niezależnie od tego czy produkuje się mniej czy więcej. Błędnem byłoby jednak przypuszczenie, że wobec tego jest ona elementem neutralnym. Właściwości tej kategorji kosztów występują z całą wyrazistością dopiero wówczas, gdy badamy jej wpływ nie w odniesieniu do sumy kosztów, lecz w odniesieniu do średniego kosztu jednostkowego. Dlatego omówienie roli, jaką odgrywa ta kategorja kosztów, nie mogło mieć miejsca w rozdziale II i zostało odłożone do rozdziału niniejszego.



Rys. 14.

Uwzględnienie stałej sumy kosztów przy obliczaniu kosztu średniego wpływa na jego podniesienie w stosunku do kosztu średniego, obliczanego z uwzględnieniem tylko zmiennej sumy kosztów. Na podstawie dotychczasowych wywodów możemy stwierdzić, że wielkość tej różnicy zależy od dwóch czynników, a mianowicie po pierwsze, od wysokości stałej sumy kosztów i po drugie, od wielkości produkcji. Wynika z tego ta ważna konsekwencja, że im większym jest udział kosztów stałych w strukturze sumy kosztów, tembardziej przedsiębiorca, pracujący w tych warunkach, będzie dążył do jak największego rozszerzania swej produkcji, by osiągnąć możliwie najmniejszy udział, przypadający na jednostkę z stałej sumy kosztów. I odwrotnie, będzie się on bronił wszelkiemi środkami przed kurczeniem produkcji, które będzie pociągało za sobą znaczną zwyżkę średnich kosztów jednostkowych. Można zatem powiedzieć, że im większym jest udział kosztów stałych w strukturze kosztów, tem sztywniejszą staje się produkcja. Znaczny udział kosztów stałych zmusza przedsiębiorcę do rozszerzania produkcji i utrudnia mu niezmiernie jej ograniczanie. Ten element kosztów, jako element ograniczający swobodę działania przedsiębiorcy i jego zdolność do każdorazowego i natychmiastowego dostosowywania się do sytuacji rynkowej, możemy nazwać elementem usztywniającym produkcję.

ROZDZIAŁ IV.

Koszt krańcowy.

Pojęcie kosztu krańcowego jest pojęciem nieco bardziej skomplikowanem od pojęcia średniego kosztu na jednostkę i dlatego wymaga bardziej szczegółowych wyjaśnień.

Najogólniejszy sens tego pojęcia jest następujący: przypuśćmy, że produkuję jakąś dowolną ilość jednostek danego dobra, np. ilość q (patrz rys. 15). Suma kosztów produkcji, odpowiadająca ilości q, wynosi $F(q)$. Przypuśćmy dalej, że powiększam obecnie moją produkcję o pewną, również dowolną, ale stosunkowo do dotychczasowej produkcji niewielką ilość, którą nazwę Δq. Suma kosztów produkcji musiała zatem również wzrosnąć i wynosi obecnie $F(q + \Delta q)$. Różnica między sumą kosztów produkcji, jaką trzeba było ponieść produkując ilość $q + \Delta q$ i tą, jaką trzeba było ponieść produkując ilość q, a więc:

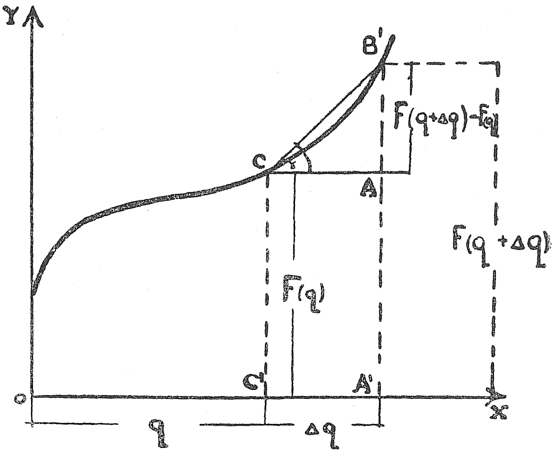
$$F(q + \Delta q) - F(q)$$

jest to dodatkowy koszt (albo przyrost sumy kosztów), jaki trzeba było ponieść dla wyprodukowania dodatkowej ilości Δq. Jeżeli teraz interesuje mnie pytanie ile wyniósł średni koszt wyprodukowania jednej jednostki spośród tej dodatkowej ilości Δq, otrzymam odpowiedź, dzieląc przyrost sumy kosztów przez przyrost produkcji[1], jak to ilustruje wykres na rys. 15.

Będę miał zatem:

$$\frac{F(q+\Delta q)-F(q)}{\Delta q}=\operatorname{tg}\gamma$$

czyli tangens kąta γ będzie średnim kosztem produkcji jednostki spośród dodatkowo wyprodukowanej ilości Δq. Ale oczywiście średni koszt jednej jednostki spośród ilości Δq a koszt krańcowy przy produkcji równej q (czyli koszt wyprodukowania jednej jednostki ponad ilość q), są to dwie różne rzeczy, bowiem, jak to widać na wykresie, koszty produkcji poszczególnych jednostek spośród ilości Δq nie są sobie równe. Im jednak będę brał Δq mniejsze, tem i różnica ta, między średnim kosztem dla całej ilości Δq a kosztem pierwszej jednostki, będzie się zmniejszać. Dokładniej niż wykres poprzedni ilustruje ten fakt wykres na rys. 16.

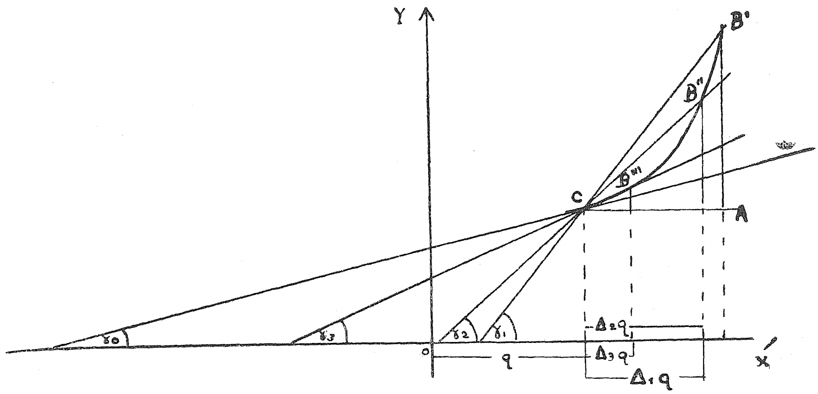


Rys. 15.

Na wykresie tym mamy obraz funkcji $F(q)$ nie w całym jej przebiegu lecz tylko w jej przedziale od C' do A', interesującym nas w tej chwili. Widzimy na tym wykresie, że gdy zmniejszam stopniowo Δq, to przeciwprostokątna trójkąta $CB'A$, będąca sieczną, przecinającą dla $\Delta_1 q$ krzywą kosztów w punktach C i B', przesuwa się i, przechodząc stale przez punkt C dla $\Delta_2 q$ przecina drugi raz krzywą kosztów w punkcie B'', dla $\Delta_3 q$ w punkcie B'''

[1] Należy odrazu jak najściślej podkreślić różnicę między rozpatrywanym obecnie wypadkiem stosunku przyrostu kosztów do przyrostu produkcji, a wypadkiem, rozpatrywanym w rozdziale III, gdzie brano pod uwagę stosunek całości kosztów do całości produkcji.

i t. d. Mogę więc powiedzieć, że w miarę jak biorę coraz mniejsze Δq punkt B' przesuwa się po krzywej, zbliżając się coraz bardziej do punktu C. Granicznem położeniem punktu B' jest punkt C, a tem samem sieczna CB', przechodząc kolejno położenia CB'', CB''' i t. d., osiągnie swe graniczne położenie CD, to znaczy z siecznej stanie się styczną do krzywej w punkcie C. Graniczną wartością tangensu kąta γ (a więc graniczną wartością



Rys. 16.

średniego kosztu jednostkowego dla dodatkowej ilości Δq) będzie tangens kąta γ_0, t. zn. tangens kąta przecięcia stycznej do krzywej w punkcie C z osią x-ów, Możemy to krótko wyrazić w sposób następujący:

$$\text{gdy } \Delta q \rightarrow 0 \quad \text{to wówczas} \quad \gamma \rightarrow \gamma_0$$
$$\text{gdy } \gamma \rightarrow \gamma_0 \quad \text{to wówczas} \quad \operatorname{tg}\gamma \rightarrow \operatorname{tg}\gamma_0$$

Tangens kąta przecięcia stycznej do krzywej, przeprowadzonej w dowolnym punkcie tej krzywej, z osią x-ów, nazywamy pochodną funkcji, której ta krzywa jest obrazem. Innemi słowami, tangens tego kąta przecięcia (jak w tym wypadku $\operatorname{tg}\gamma_0$), czyli pochodna funkcji, jest miarą szybkości zmian (wzrostu, gdy funkcja jest rosnąca i malenia, gdy funkcja jest malejąca), zachodzących w wartości funkcji, w zależności od zmian zmiennej niezależnej.

Pochodna funkcji sumy kosztów jest zatem (w pewnem przybliżeniu) tym kosztem, jaki pociąga za sobą powiększenie produkcji o bardzo drobną ilość, np. o jedną jednostkę, jest więc tem, co określone zostało powyżej jako koszt krańcowy. Jeżeli koszt krańcowy oznaczę symbolem k_g, mogę napisać ogólnie:

$$k_g = F'(q).$$

Odrazu należy zwrócić baczną uwagę na jedno. Gdy poprzednio rozważaną była sprawa średnich kosztów jednostkowych widzieliśmy, jak znaczny wpływ zarówno na wielkość jak i na przebieg kosztów średnich, miało uwzględnienie w ich obliczaniu stałej sumy kosztów. Wówczas bowiem badany był stosunek całości kosztów do całości produkcji. Obecnie, jak już zaznaczono powyżej, w dopisku, interesuje nas stosunek przyrostu kosztów do przyrostu produkcji. Jaką jest w tym wypadku rola stałej sumy kosztów?

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć koszt krańcowy w wypadku, gdy mamy wyłącznie do czynienia ze stałą sumą kosztów. Jak wiemy, w tych warunkach rozszerzając produkcję nie trzeba ponosić żadnych dodatkowych kosztów. Innemi słowami, przyrost kosztów wówczas równa się zeru, a więc koszt krańcowy, który jest przyrostem sumy kosztów, gdy chcemy powiększyć ilość produkowaną o jedną jednostkę, również równa się zeru. Fakt ten możemy wyrazić matematycznie, mówiąc: stała suma kosztów, jako funkcja ilości produkowanych jednostek, jest funkcją stałą, pochodna zaś funkcji stałej jest równa zeru.

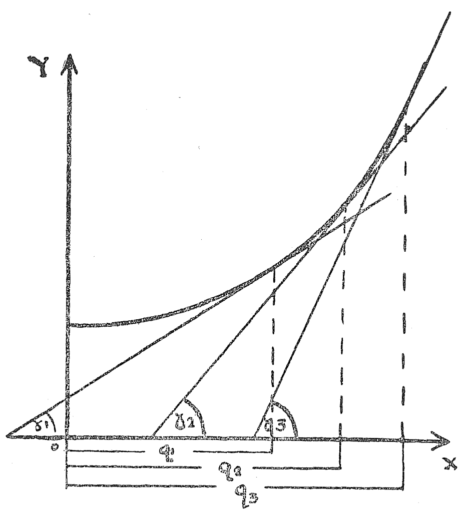
Otóż, ponieważ stała suma kosztów *ex definitione* nie podlega żadnym zmianom w miarę wzrostu (lub kurczenia się) produkcji, wielkość kolejnych przyrostów całkowitej sumy kosztów zależy więc wyłącznie od zachowania się zmiennej sumy kosztów. Obecność stałej sumy kosztów w strukturze kosztów, które badamy, względnie jej zmiany, nie mają zatem żadnego wpływu na wielkość i zachowanie się kosztów krańcowych. Z tego punktu widzenia stała suma kosztów jest elementem najzupełniej obojętnym. Tam zatem, gdzie nie mamy do czynienia ze zmienną sumą kosztów, nie spotykamy się również z problemem kosztu krańcowego.

O koszcie krańcowym możemy więc mówić dopiero wówczas, gdy suma kosztów zmienia się w zależności od zmian w rozmiarach produkcji.

Gdy zmiany sumy kosztów są wprost proporcjonalne, wówczas problem ten jest bardzo prosty. Wprost proporcjonalne zmiany sumy kosztów oznaczają, jak była już o tem mowa poprzednio, że równym przyrostom ilości produkowanych odpowiadają równe przyrosty kosztów, czyli że wyprodukowanie każdej następnej jednostki kosztuje tyle, ile kosztowało wyprodukowanie poprzedniej. W tych warunkach więc koszt krańcowy będzie wielkością stałą. Istotnie ponieważ

$$F(q) = cq + d$$
$$k_g = \varphi(q) = F'(q) = c$$ [1].

Wykres tego rodzaju kosztu krańcowego przedstawiałby się jako prosta równoległa do osi x-ów i przecinająca oś y-ów ponad osią x-ów o wielkość c. Wypadek ten jest bardzo prosty i nie nastręczający materjału do dalszych rozważań.



Rys. 17.

Bardziej skomplikowanym jest wypadek, gdy zmienna suma kosztów wzrasta więcej niż proporcjonalnie wraz z wzrostem produkcji. W tym wypadku, jak wiemy, wyprodukowanie każdej następnej jednostki pociąga za sobą większy nakład niż ten, który trzeba było ponieść dla wyprodukowania jednostki poprzedniej. Narazie nic jednak jeszcze nie wiemy, jakie jest tempo wzrostu tych kolejnych nakładów. Spróbujmy zilustrować ten przykład graficznie. Jest on przedstawiony na rys. 17. Przypuśćmy, że chcę zbadać koszt krańcowy, jaki zachodzi przy wielkości produkcji wynoszącej kolejno q_1, q_2, q_3 i t. d. W tym celu przeprowadzamy styczne do krzywej kosztów w punktach, odpowiadających danym wielkościom produkcji i badamy kąty

[1] Nie wdając się w szczegółowe wywody podaję tutaj najogólniejszy wzór na wyprowadzanie pochodnych, czyli na różniczkowanie funkcyj. Ogólny ten wzór dla jednomianów jest następujący:

jeżeli $f(x) = ax^n$ to wówczas $f'(x) = nax^{n-1}$.

Na podstawie, że pochodna sumy równa się sumie pochodnych, otrzymuję pochodną wielomianu, będącego sumą jednomianów, różniczkując pokolei te jednomiany, wchodzące w jego skład.

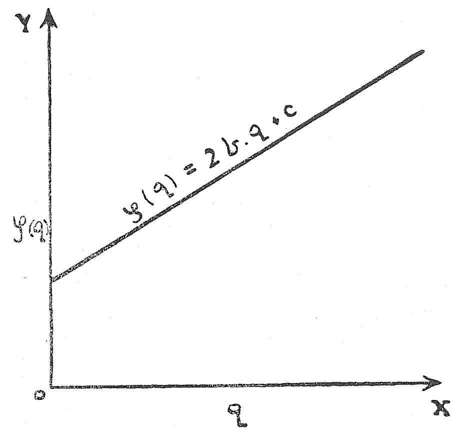
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i t. d., utworzone przez te styczne z osią x-ów. Widzimy, że w miarę jak produkcja wzrasta, kąty te rosną, a więc rosną ich tangensy, które przyjmujemy za koszty krańcowe przy danych wielkościach produkcji. Interesuje nas jednak nietylko to, że koszty krańcowe rosną ale i pytanie, jak one rosną w miarę wzrostu produkcji. W rozpatrywanym wypadku

$$F(q) = bq^2 + cq + d$$

a więc

$$\varphi(q) = F'(q) = 2bq + c.$$

W wypadku sumy kosztów, wzrastającej więcej niż proporcjonalnie, koszt krańcowy stale wzrasta i wzrost ten jest stale równomierny, jest proporcjonalny do ilości produkowanej, jak to ilustruje wykres na rys. 18.



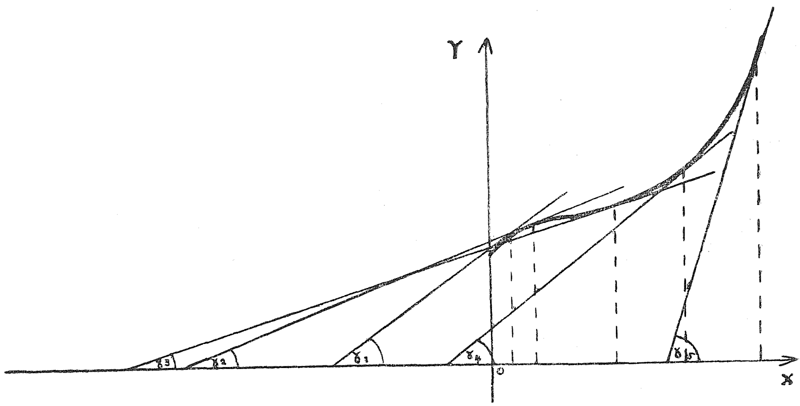
Rys. 18.

Wykres ten jest linją prostą, przesuniętą wgórę wzdłuż osi y-ów o wielkość c ponad oś x-ów. Jaki jest sens tego c, t. zn. wartości kosztu krańcowego przy q równem zeru? Wyjaśnienie w tym wypadku jest zupełnie takie same jak w wypadku średniego kosztu jednostkowego (przy uwzględnianiu tylko zmiennej sumy kosztów). Znaczenie c w obu tych wypadkach jest identyczne [1].

Jak i przy poprzednio rozpatrywanych problemach tak i przy badaniu kosztu krańcowego, wypadek zmiennej sumy kosztów, rosnącej nieproporcjonalnie w stosunku do wzrostu produkcji, dostarcza najwięcej komplikacyj. Jeżeli, analogicznie jak w ostatnio omawianym wypadku, zrobimy wykres sumy kosztów i poprowadzimy szereg stycznych do krzywej sumy kosztów w punktach, odpowiadających coraz zwiększającym się rozmiarom produkcji, wówczas z łatwością zauważamy, że kolejne kąty, jakie te styczne tworzą z osią x-ów, początkowo maleją. Na wykresie na rys. 19

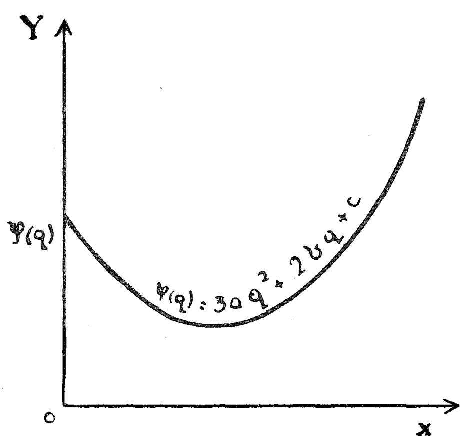
[1] W rozdziale niniejszym pomijam problem stosunków, zachodzących między kosztami średniemi a kosztami krańcowemi. Będą one omówione w rozdziale V.

kąt γ_2 jest mniejszy od kąta γ_1, a kąt γ_3 jest mniejszy od kąta γ_2. Od pewnego jednak punktu począwszy kąty te poczynają rosnąć i tak kąt γ_4 jest już większy od kąta γ_3 i t. d. Tak samo więc zachowują się tangensy tych kątów. Oznacza to, że obecnie mamy do czynienia z kosztem krańcowym, który początkowo ma-



Rys. 19.

leje, osiąga swoje minimum w pewnym punkcie, a następnie zaczyna wzrastać. Inaczej niż w wypadku poprzednim, gdzie koszt krańcowy był stale rosnący.



Rys. 20.

Tempo tego malenia, względnie wzrostu, podaje nam wzór na koszt krańcowy. W tym wypadku

$$F(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$$

a więc

$$\varphi(q) = F'(q) =$$
$$= 3aq^2 + 2bq + c.$$

Równaniem kosztu krańcowego jest więc w tym wypadku równanie drugiego stopnia, którego wykresem jest parabola o osi równoległej do osi y-ów i przesunięta na prawo od niej (przypominam, że w rozpatrywanym wypadku b jest ujemne), jak to ilustruje wykres na rys. 20.

Parabola ta będzie przebiegać ponad osią x-ów, gdyż koszt krańcowy w żadnym punkcie nietylko nie może być wielkością negatywną, ale również nie może być równy zeru. Równanie kosztu krańcowego

$$\varphi(q) = 3aq^2 + 2bq + c$$

nie może zatem posiadać pierwiastków rzeczywistych, czyli musi zachodzić warunek

$$b^2 < 3ac.$$

ROZDZIAŁ V.

Stosunek kosztu krańcowego do kosztu średniego.

Po rozważeniu problemów kosztu średniego na jednostkę i kosztu krańcowego niezależnie od siebie, powstaje pytanie jaki istnieje związek między temi dwoma wielkościami. Z dotychczasowych uwag wynika, że w wypadku gdy mamy do czynienia wyłącznie z stałą sumą kosztów, wówczas koszt średni jest stale malejący, a koszt krańcowy stale równy zeru. Gdy mamy do czynienia wyłącznie z kosztami rosnącemi wprost proporcjonalnie do ilości produkowanej, wówczas koszt średni jest stale równy kosztowi krańcowemu, i są one wielkościami stałemi. I wreszcie w wypadku kombinacji tych dwóch kategoryj kosztów, koszt średni stale maleje dążąc do zrównania się z kosztem krańcowym, będącym w tym wypadku wielkością stałą, równą kosztowi średniemu, wyliczanemu tylko w odniesieniu do zmiennej sumy kosztów. W wypadku natomiast, gdy mamy do czynienia wyłącznie ze zmienną sumą kosztów wzrastających więcej niż proporcjonalnie, koszt średni i koszt krańcowy będą stale rosnące wprost proporcjonalnie do ilości produkowanej. Tempa ich wzrostów będą jednak różne. Koszt średni w tym wypadku będzie równy:

$$f_1(q) = bq + c$$

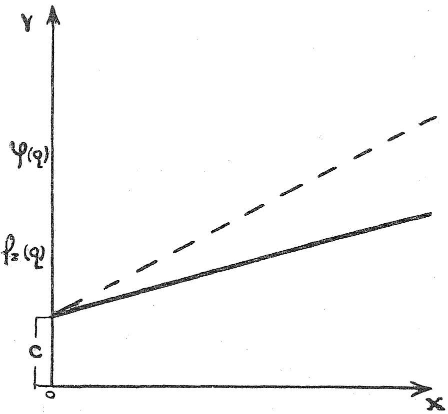
a koszt krańcowy będzie równy:

$$\varphi(q) = 2bq + c.$$

Koszt krańcowy będzie więc rosnąć szybciej od kosztu średniego i będzie stale od niego wyższy, jak to jest przedstawione na wykresie na rys. 21.

Równość obu tych rodzajów kosztów zachodzi tylko dla $q = 0$ i wynosi wówczas c. Znaczenie tego c zostało już wyjaśnione powyżej. Na wykresie przebieg kosztu krańcowego zaznaczony został linją przerywaną, a kosztu średniego linją ciągłą.

W tych wypadkach możemy zatem stwierdzić, że, o ile koszt średni jest malejący, to koszt krańcowy jest stale niższy od kosztu średniego i naodwrót, jeżeli koszt średni jest rosnący, to koszt krańcowy jest stale wyższy od kosztu średniego i wreszcie, jeżeli koszt średni jest wielkością stałą, to koszt krańcowy jest stale równy kosztowi średniemu. Pozatem o ich wzajemnym stosunku nie mamy nic do powiedzenia.



Rys. 21.

Bardziej interesujące są natomiast wypadki następujące: całkowita suma kosztów o kosztach zmiennych wzrastających więcej niż proporcjonalnie, oraz całkowita suma kosztów o kosztach zmiennych, wzrastających nieproporcjonalnie.

Zajmijmy się najpierw wypadkiem pierwszym. W wypadku tym, t. j. gdy:

$$F(q) = bq^2 + cq + d$$

średni koszt jednostkowy równa się:

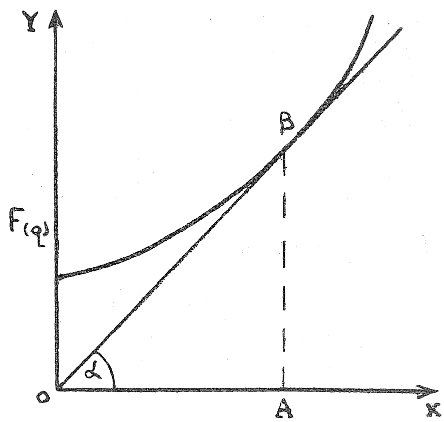
$$f(q) = bq + c + \frac{d}{q}$$

a koszt krańcowy:

$$\varphi(q) = 2bq + c.$$

O tej kategorji kosztu średniego wiemy z rozdziału IV, że jest on początkowo malejący, a następnie wzrastający. Powstają więc teraz pytania: primo, kiedy, t. zn. dla jakiej wielkości produkcji będzie koszt średni najniższy, oraz secundo, jaki będzie obecnie stosunek kosztu krańcowego do kosztu średniego.

Koszt średni jest wyrażony przez iloraz rzędnej do odciętej, a więc AB do OA, czyli tangens kąta α w trójkącie OAB. Najniższy koszt średni będzie miał więc miejsce wówczas gdy tangens kąta α będzie najmniejszy. Tangens kąta α będzie zaś najmniejszy wówczas gdy przeciwprostokątna trójkątą OAB, t. zn. prosta OB będzie nie sieczną krzywej kosztów, jak na rys. 7, lecz będzie do niej styczną, jak na rys. 22.



Rys. 22.

Dla jakiej wielkości produkcji, czyli dla jakiego q będzie ten wypadek zachodzić? Dla takiego q, dla którego funkcja jednostkowego kosztu średniego osiągnie swoje minimum. Aby to obliczyć musimy zbadać dla jakiego q pochodna funkcji jednostkowego kosztu średniego będzie równa zeru. Pochodna tej funkcji równa się:

$$f'(q) = b - \frac{d}{q^2}.$$

Jeżeli zatem

$$b - \frac{d}{q^2} = 0$$

to wówczas

$$bq^2 = d$$

$$q^2 = \frac{d}{b}$$

$$q = \sqrt{\frac{d}{b}}^{1}.$$

Odcinek OA, reprezentujący na wykresie na rys. 22 tę wielkość produkcji, przy której tangens kąta α jest najmniejszy, jest zatem równy q, równemu $\sqrt{\frac{d}{b}}$. Odpowiedź na pierwsze pytanie już mamy. Zajmijmy się teraz drugiem.

[1] Dla nas sens może mieć oczywiście jedynie $q > 0$, ujemnego pierwiastka z $\frac{d}{b}$ możemy nie brać pod uwagę.

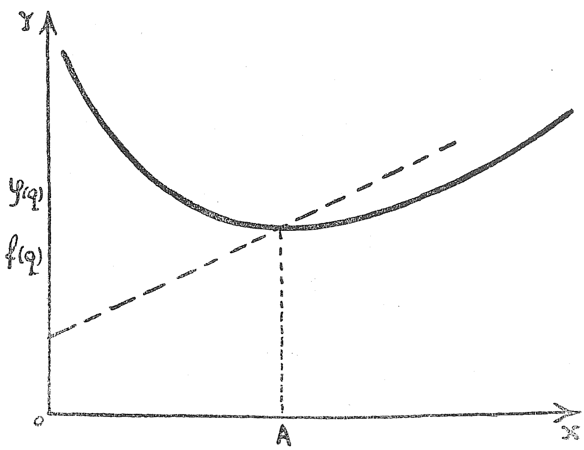
O koszcie krańcowym rozpatrywanej obecnie kategorji sumy kosztów wiemy, że wzrasta on wprost proporcjonalnie do wielkości produkcji. Koszt średni, natomiast, w miarę wzrostu produkcji maleje, osiąga swe minimum, poczem wzrasta. Dla jakiego rozmiaru produkcji zatem koszt krańcowy będzie niższy, dla jakiego równy i wreszcie dla jakiego będzie wyższy od kosztu średniego? Zacznijmy od pytania kiedy będzie równy, t. zn. kiedy

$$bq + c + \frac{d}{q} = 2bq + c.$$

Musimy teraz znaleźć dla jakiego q ta równość będzie zachodzić.

$$bq^2 + cq + d - 2bq^2 - cq = 0$$
$$-bq^2 + d = 0$$
$$bq^2 = d$$
$$q^2 = \frac{d}{b}$$
$$q = \sqrt{\frac{d}{b}}.$$

Okazuje się zatem, że zrównanie kosztu średniego z kosztem krańcowym nastąpi przy takim rozmiarze produkcji przy którym zostaje osiągnięty najniższy koszt średni, t. zn. dla $q = \sqrt{\frac{d}{b}}$. Dla produkcji mniejszej, czyli dla $q < \sqrt{\frac{d}{b}}$ koszt średni będzie stale malejący i większy od kosztu krańcowego, a dla produkcji większej, czyli dla $q > \sqrt{\frac{d}{b}}$ koszt średni będzie rosnący i stale mniejszy od kosztu krańcowego. Fakt ten ilustrował już wykres na rys. 22, na którym widzielimy, że najmniejszy kosz średni ma miejsce wówczas, gdy prosta OB jest styczną do krzywej kosztów. Wówczas tangens kąta α jest jednocześnie kosztem średnim i kosztem krańcowym dla danej wielkości produkcji. Ten sam fakt jest również z ilustrowany na wykresie na rys. 23. Linja krzywa ciągła oznacza koszt średni, a przerywana prosta koszt krańcowy. Punkt ich przecięcia, oznaczający zrównanie wartości obu tych funkcyj, ma miejsce w najniższym punkcie kosztu średniego. Interesującem może być teraz pytanie, jaki wpływ może wywrzeć zmiana współczynników kosztów na koszt średni i na koszt krańcowy. b zostało powyżej określone jako element **hamujący** rozszerzanie produkcji. Istotnie widzimy teraz, że wzrost b wywoła zmniejszenie q, dla którego zachodzi najniższy koszt średni, i powiększenie tempa wzrostu kosztu krańcowego. Punkt przecięcia zostanie przesunięty na lewo. Zniżka b wywoła skutki wprost przeciwne. Zmiany c, jako elementu **obojętnego**, pozostaną bez wpływu na minimum kosztu średniego, jak i na tempo wzrostu krańcowego. Wreszcie wzrost d, nazwanego powyżej elementem **usztywniającym**, wpłynie na powiększenie q, dla którego zachodzi minimum kosztu średniego i pozostanie bez znaczenia dla przebiegu kosztu krańcowego. Punkt przecięcia zostanie przesunięty na prawo. I vice versa.



Rys. 23.

W wypadku, gdy w skład całkowitej sumy kosztów wchodzi zmienna suma kosztów rosnąca nieproporcjonalnie w stosunku do wzrostu produkcji, t. zn. gdy:

$$F(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$$

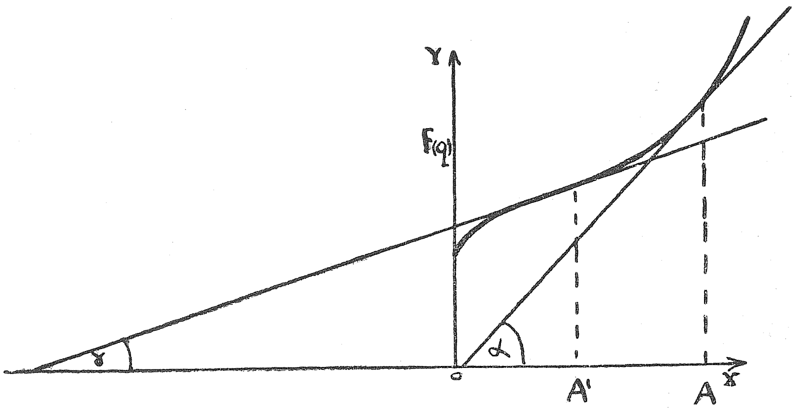
średni koszt jednostkowy równa się:

$$f(q) = aq^2 + bq + c + \frac{d}{q}$$

a koszt krańcowy

$$\varphi(q) = 3aq^2 + 2bq + c.$$

Wypadek, rozpatrywany obecnie, różni się znacznie od poprzedniego. Koszt średni, coprawda analogicznie, maleje początkowo, osiąga minimum i następnie wzrasta, a przebieg jego jest tylko nieco inny niż w wypadku poprzednim. Koszt krańcowy natomiast nie jest już stale i równomiernie rosnący, lecz również początkowo maleje i po osiągnięciu swego minimum wzrasta. Najniższy koszt średni będzie osiągnięty tam, gdzie otrzymamy najmniejszy tangens α, a najniższy koszt krańcowy tam, gdzie otrzymamy najmniejszy tangens γ (patrz rys. 24). Interesującem jest zatem pytanie, jaki jest stosunek wielkości produkcyj, dla których zostaje osiągnięty najniższy koszt średni i najniższy koszt krańcowy. Jak wiemy,



Rys. 24.

wielkość produkcji, dla której otrzymamy najniższy koszt średni, możemy obliczyć przyrównując pochodną funkcji kosztu średniego do zera, a więc:

$$f'(q) = 2aq + b - \frac{d}{q^2}.$$

Jeżeli zatem

$$2aq + b - \frac{d}{q^2} = 0$$

$$2aq^3 + bq^2 - d = 0$$

to wówczas

$$q = -\frac{1}{3}\frac{b}{2a} + \sqrt[3]{\frac{d}{4a} - \frac{1}{27}\frac{b^3}{8a^3} + \sqrt[2]{\frac{d^2}{16a^2} - 2\frac{1}{27}\frac{b^3}{8a^3}\frac{d}{4a}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{d}{4a} - \frac{1}{27}\frac{b^3}{8a^3} - \sqrt[2]{\frac{d^2}{16a^2} - 2\frac{1}{27}\frac{b^3}{8a^3}\frac{d}{4a}}}.$$

Powyższy wzór robi wrażenie bardzo skomplikowanego, w gruncie rzeczy jednak jest on na tyle przejrzysty, że możemy bez trudności znaleść w nim odpowiedź na wszystkie interesujące nas pytania [1]. Przedewszystkiem możemy stwierdzić, że otrzymamy z niego jednoznacznaczne określenie wartości q, t. zn. otrzymamy tylko jedną odpowiedź na pytanie dla jakiej wielkości produkcji uzyskuje się najniższy średni koszt. Jednoznaczne określenie wartości q otrzymamy dlatego, ponieważ wyrażenie, znajdujące się pod pierwiastkiem drugiego stopnia, czyli t. zw. wyróżnik, jest zawsze dodatnie, niezależnie od tego jakie wartości przyjmiemy na współczynniki kosztów produkcji [2].

Dalej, możemy również z podanego wzoru wywnioskować, jaki wpływ na rozmiary produkcji, dla których uzyskuje się najniższy średni koszt, wywierać będą zmiany wielkości poszczególnych czynników kosztów. Widzimy mianowicie, że wzrost d oraz wzrost b (biorąc pod uwagę bezwzględną wartość b) będzie wpływał na rozszerzenie produkcji, celem osiągnięcia najniższego kosztu średniego (ponieważ zarówno d jak b występują tylko w licznikach wyrażeń, wchodzących wskład podanego wzoru). Wzrost a natomiast będzie zmuszał do ograniczenia produkcji (ponieważ a występuje jedynie w licznikach wyrażeń, wchodzących wskład podanego wzoru). Zniżka tych współczynników będzie wywoływać, rzecz prosta, odwrotne skutki. Wielkość współczynnika c i jego zmiany nie mają żadnego wpływu na najniższy koszt średni. Toteż element ten wogóle nie figuruje w podanym wzorze. I wreszcie, możemy nawet stwierdzić, że wielkość produkcji, dla której zostanie osiągnięty najniższy koszt średni, będzie większa od $-\frac{b}{2a}$. Uzasadnić to można w sposób następujący: gdyby współczynnik d

[1] Rozwiązanie równania trzeciego stopnia nastręcza o wiele więcej trudności niż rozwiązanie równania stopnia drugiego. Nie chcąc nużyć czytelnika zbyt długim, czysto matematycznym, wywodem, podaję ostateczny wzór, pomijam natomiast jego wyprowadzenie. Wskazówki co do rozwiązywania równań trzeciego stopnia znajdzie czytelnik między innemi w następujących książkach: A. Hoborski, Wyższa matematyka, cz. I. Kraków 1923, str. 456 i nast. St. Ruziewicz i E. Żyliwski, Wstęp do matematyki, Lwów 1927, str. 243 i nast.

[2] Stosownie do założeń, wymienionych w rozdziale II, musi zawsze zachodzić $a > 0$, $d > 0$, $b < 0$. Skoro b jest ujemne zatem $-\frac{1}{27}\frac{b^3}{8a^3}$ jest dodatnie, wobec czego całe wyrażenie pod pierwiastkiem drugiego stopnia jest dodatnie, a więc, jak stwierdza analiza równań trzeciego stopnia, w wypadku tym otrzymamy dla badanego równania tylko jeden pierwiastek rzeczywisty (por. literaturę, wskazaną w poprzednim dopisku).

był równy zeru, wówczas powyższy wzór na q byłby zredukowany do postaci:

$$
\begin{aligned}
q &= -\frac{1}{3}\frac{b}{2a} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}\frac{b^3}{8a^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}\frac{b^3}{8a^3}} \\
&= -\frac{1}{3}\frac{b}{2a} - \frac{1}{3}\frac{b}{2a} - \frac{1}{3}\frac{b}{2a} \\
&= -\frac{b}{2a}.
\end{aligned}
$$

Jak była o tem mowa powyżej, wzrost współczynnika d wpływa na zwiększenie q, ponieważ zaś w rozpatrywanym wypadku współczynnik d jest większy od zera, a więc q w tym wypadku musi być większe od tej wartości q, którą otrzymujemy w wypadku gdy d równa się zeru, a więc tem samem q musi być większe od $-\frac{b}{2a}$.

Analogicznie możemy obliczyć wielkość produkcji, dla której osiągamy najniższy koszt krańcowy. Pochodna funkcji kosztu krańcowego (czyli druga pochodna funkcji sumy kosztów) równa się

$$\varphi'(q) = 6aq^2 + 2bq.$$

Przyrównywując ją do zera otrzymamy

$$
\begin{gathered}
6aq^2 + 2bq = 0 \\
q(6aq + 2b) = 0.
\end{gathered}
$$

Lewa strona tego równania będzie równa zeru, jeżeli albo:

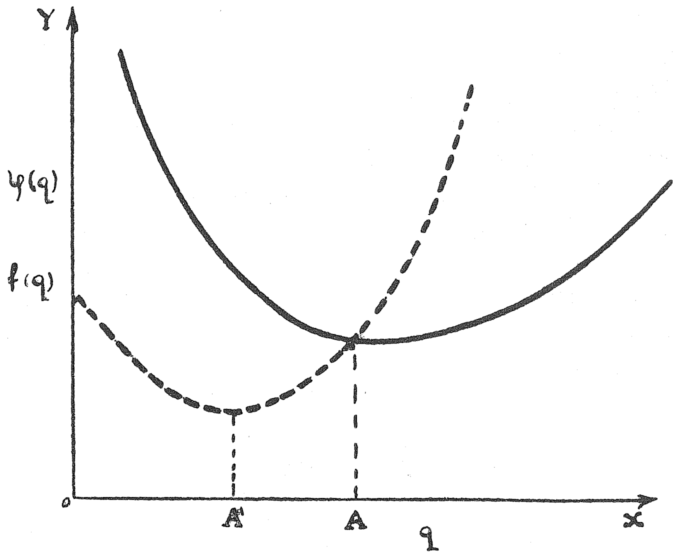
$$q = 0$$

(ten wypadek jednak nie jest dla nas interesujący, możemy go więc nie brać pod uwagę) albo:

$$
\begin{gathered}
6aq + 2b = 0 \\
q = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}.
\end{gathered}
$$

Z wzoru tego odrazu widzimy, że wzrost b (co do bezwzględnej wartości) będzie powodował zwiększenie wielkości produkcji, dla której będzie zachodzić najniższy koszt krańcowy i naodwrót. Wzrost a zaś sprowadzi skutki wprost przeciwne. Współczynniki c i d są z tego punktu widzenia obojętne dla kosztu krańcowego.

Widzimy zatem, że najniższy koszt średni i najniższy koszt krańcowy zachodzą dla różnych wielkości produkcji. N a j n i ż s z y k o s z t k r a ń c o w y z o s t a j e o s i ą g n i ę t y w c z e ś n i e j, t. zn. d l a p r o d u k c j i o m n i e j s z y c h r o z m i a r a c h n i ż t e, p r z y k t ó r y c h o s i ą g a s i ę n a j n i ż s z y k o s z t ś r e d n i. Najniższy koszt krańcowy zachodzi mianowicie dla produkcji równej $-\frac{b}{3a}$, a przy rozpatrywaniu kosztu średniego widzieliśmy, że produkcja, dla której



Rys. 25.

będzie miał miejsce najniższy koszt średni, będzie musiała w każdym razie być większa od $-\frac{b}{2a}$, tem bardziej więc będzie większa od tej produkcji, dla której osiąga się najniższy koszt krańcowy. Fakt ten ilustruje graficznie wykres na rys. 24. Koszt krańcowy reprezentowany jest na nim przez tangens kąta γ, który będzie najmniejszy dla produkcji równej OA', a koszt średni przez tangens kąta α, który będzie najmniejszy dla produkcji równej OA.

Skolei należy poszukać teraz odpowiedzi na pytanie, jaki jest w tym wypadku stosunek kosztu średniego do kosztu krańcowego, czy i ewentualnie kiedy (dla jakiej wielkości produkcji) zachodzi równość, a kiedy koszt średni jest większy, względnie mniejszy od kosztu krańcowego. Analogicznie jak w wypadku poprzednim przyrównajmy koszt średni do kosztu krańcowego. Otrzymamy:

$$aq^2 + bq + c + \frac{d}{q} = 3aq^2 + 2bq + c$$

$$aq^2 + bq + c + \frac{d}{q} - 3aq^2 - 2bq + c = 0$$

$$-2aq^2 - bq + \frac{d}{q} = 0$$

$$2aq^3 + bq^2 - d = 0.$$

Otrzymujemy więc w rezultacie to samo równanie, z którego poprzednio wyprowadzony był wzór na wielkość produkcji, dla której osiąga się najniższy koszt średni. Widzimy więc, że i w tym wypadku, tak samo jak w poprzednim, koszt średni będzie równy kosztowi krańcowemu przy produkcji tych rozmiarów, dla których ma miejsce najniższy koszt średni. W tym też punkcie nastąpi przecięcie obu krzywych, jak to ilustruje wykres na rys. 25 (koszt średni zaznaczony jest krzywą ciągłą, koszt krańcowy zaś krzywą kreskowaną).

Dla produkcji mniejszej koszt średni będzie malejący i stale większy od kosztu krańcowego, dla produkcji większej natomiast koszt średni będzie rosnący i stale większy od kosztu krańcowego.

ROZDZIAŁ VI.

Wpływ zwyżki ceny na wielkość produkcji.

W dotychczasowych rozważaniach problem ceny nie był zupełnie brany pod uwagę, a właściwie, ściślej mówiąc, problem ceny różnej od najniższego kosztu średniego. Jeśli bowiem przyjmiemy, że cena jednostki danego dobra równa się dla danego przedsiębiorstwa jego najniższemu średniemu kosztowi produkcji, to wówczas nie jest ona dla nas interesująca, ponieważ nie ma żadnego wpływu na kształtowanie się rozmiarów produkcji w zakresie tego przedsiębiorstwa. Dopiero cena wyższa od najniższego kosztu średniego zaczyna być interesująca. Dopiero wówczas bowiem pojawia się nowy element, a mianowicie element zysku, który ze swej strony może wpływać na wielkość produkcji. Z chwilą, gdy zostanie wprowadzony element zysku, najważniejszem pytaniem, domagającem się odpowiedzi, będzie pytanie gdzie, to znaczy dla jakiej wielkości produkcji, zysk będzie największy.

Mówiąc o zysku można mieć na myśli albo zysk, osiągany na jednostce, czyli zysk jednostkowy, albo sumę zysków, osiąganych na poszczególnych jednostkach, przy danej wielkości produkcji czyli krótko, sumę zysków. W rozdziale niniejszym tylko to drugie pojęcie zysku będzie brane pod uwagę. Sumę zysków definjuję jako różnicę między s u m ą c e n, otrzymanych za daną ilość wyprodukowanych jednostek i s u m ą k o s z t ó w, jakie trzeba było ponieść dla wyprodukowania tej ilości, przyczem zakładam, że w s z y s t k o, co zostało wyprodukowane, zostało sprzedane.

Z powyższej definicji sumy zysków widzimy, że jest ona związana z wielkością produkcji i zmienia się w zależności od jej zmian. Jest ona zatem jakąś funkcją ilości produkowanej. Jeżeli sumę zysków oznaczymy symbolem S, to możemy napisać:

$$S = Z(q).$$

Sumę cen również możemy uważać jako pewną funkcję, a mianowicie jako funkcję ilości sprzedanej, a ponieważ powyżej zrobione było zastrzeżenie, że ilość sprzedana równa się ilości wyprodukowanej, a więc możemy ją uważać jako funkcję wielkości produkcji. Jak możemy scharakteryzować tę funkcję? Jeżeli przedsiębiorstwo, które badamy, pracuje w warunkach wolnej konkurencji i jest tylko jednem z wielu w danej gałęzi produkcji, a przytem jego zdolność produkcyjna a zatem i jego aktualna produkcja jest stosunkowo niewielka w stosunku do ogólnego *volumen* produkcji danego dobra, wówczas nie popełnimy zbyt rażącego błędu, jeżeli przyjmiemy że ilość, produkowana i dostarczana na rynek przez to przedsiębiorstwo, pozostaje bez wpływu na cenę tego dobra. To znaczy, że cena ta pozostaje niezmieniona, niezależnie od tego jakie są rozmiary produkcji badanego przedsiębiorstwa. C e n a j e d n o s t k o w a, uzyskiwana przez to przedsiębiorstwo, będzie zatem jakąś w i e l k o ś c i ą s t a ł ą. Oznaczmy ją symbolem p. Suma cen, uzyskiwana przez to przedsiębiorstwo, będzie więc równa iloczynowi ceny jednostkowej p przez wielkość produkcji, a zatem, jeżeli oznaczymy sumę cen symbolem C, to:

$$C = p \cdot q.$$

Funkcję sumy kosztów już znamy. Ostatecznie więc, na podstawie podanej powyżej definicji sumy kosztów, możemy napisać:

$$Z(q) = p \cdot q - F(q).$$

Taką jest definitywna postać funkcji sumy zysków.

Jak zaznaczyłem na początku niniejszego rozdziału, najważniejszem pytaniem, na które ma być obecnie udzielona odpowiedź, jest, dla jakiej wielkości produkcji osiągnięta będzie największa sumy zysków, czyli dla jakiego q funkcja $Z(q)$ osiągnie swoje maksimum. Odpowiedź brzmi: funkcja $Z(q)$ osiągnie maksimum dla takiego q, dla którego jej pierwsza pochodna będzie równa zeru. Zróżniczkujmy zatem równanie funkcji sumy zysków. Otrzymujemy:

$$Z'(q) = p - F'(q).$$

Jeżeli

$$Z'(q) = 0$$

to znaczy

$$p - F'(q) = 0$$

a więc

$$F'(q) = p.$$

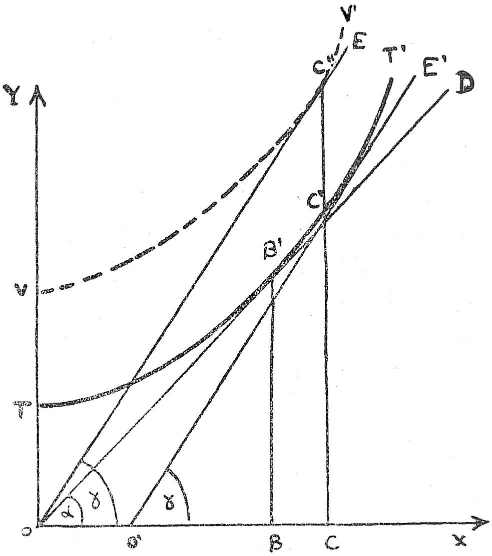
N a j w i ę k s z e z y s k i uzyskane będą zatem przez dane przedsiębiorstwo wówczas, gdy jego produkcja osiągnie te rozmiary, przy których k o s z t k r a ń c o w y b ę d z i e r ó w n y c e n i e.

Dla ceny, równej najniższemu średniemu kosztowi jednostkowemu, postulat ten będzie spełniony, ponieważ dla tej wielkości produkcji, dla której uzyskuje się najniższy koszt średni, koszt krańcowy równa się kosztowi średniemu, jak była o tem mowa w rozdziale V. Jeżeli teraz cena przewyższa najniższy koszt średni, to przewyższa tem samem dotychczasowy koszt krańcowy. Aby więc dane przedsiębiorstwo mogło osiągnąć największą sumę zysków, musi p o w i ę k s z y ć r o z m i a r y s w e j p r o d u k c j i i powiększać je musi tak długo, dopóki koszt krańcowy nie zrówna się z ceną.

Jakie rezultaty otrzymamy, stosując powyżej uzyskane wyniki ogólne do poszczególnych kategoryj kosztów?

W wypadku, gdy mamy do czynienia wyłącznie ze stałą sumą kosztów, koszt krańcowy jest stale równy zeru (ponieważ funkcja sumy kosztów jest w tym wypadku funkcją stałą). Zwyżka ceny powiększa więc tylko rozbieżność między kosztem krańcowym i ceną, zrównanie więc tych dwóch wielkości nie może nigdy nastąpić.

Analogiczny jest wypadek sumy kosztów, wzrastającej wprost proporcjonalnie do wzrostu produkcji. W wypadku tym koszt krańcowy jest wielkością stałą, niezależną od wielkości produkcji i jest stale równy kosztowi średniemu. Dzięki zwyżce ceny ponad poziom kosztu średniego, powstaje rozbieżność między ceną i kosztem krańcowym, która to rozbieżność utrzymuje się niezależnie od wielkości produkcji.



Rys. 26.

W obu tych wypadkach zatem najkorzystniejszą będzie, bez względu wielkość rozbieżności między kosztem krańcowym i ceną, maksymalna wielkość produkcji, zakreślona warunkami technicznemi danego przedsiębiorstwa. Nie warto więc zajmować się bliżej temi wypadkami.

Inaczej przedstawia się problem maksymalnej sumy zysków wówczas, gdy mamy do czynienia z sumą kosztów, wzrastającą więcej niż proporcjonalnie. W tym wypadku bowiem wysokość kosztu krańcowego pozostaje w ścisłej zależności od rozmiarów produkcji. Funkcja sumy zysków będzie miała w tym wypadku postać:

$$Z(q) = p \cdot q - bq^2 - cq - d.$$

Koszt krańcowy będzie równy cenie, to znaczy:

$$2bq + c = p$$

wówczas gdy:

$$q = \frac{p - c}{2b}.$$

Na wykresie na rys. 26 mamy zilustrowane graficznie te związki. Krzywa TT' jest to wykres sumy kosztów, a prosta OE jest to wykres sumy cen, w wypadku, gdy cena jednostkowa przewyższa najniższy średni koszt. Najniższy średni koszt równa się:

$$\frac{BB'}{OB} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ilość zaś produkowana przy najniższym koszcie średnim równa się OB.

Jeżeli teraz kąt, utworzony przez wykres sumy cen, to jest przez prostą OE z osią x-ów, nazwiemy γ, to cena jednostkowa równa się tangensowi kąta γ. Poprowadźmy teraz prostą $O'E'$, styczną do krzywej sumy kosztów, tak, aby kąt jej przecięcia z osią x-ów równy był kątowi, jaki z osią x-ów tworzy prosta OE, t. j. równy kątowi γ. Prosta $O'E'$ będzie styczna do krzywej sumy kosztów w punkcie odpowiadającym wielkości produkcji OC. Tangens jej kąta przecięcia z osią x-ów będzie to zatem koszt krańcowy dla wielkości produkcji równej OC. Ponieważ będzie on równy cenie, więc dla tej właśnie wielkości produkcji dane przedsiębiorstwo osiągnie największą sumę zysków. Suma cen osiągana za ilość równą OC, równa się CC'', suma kosztów produkcji tejże ilości równa się CC'. Największa suma zysków równa się zatem różnicy tych dwóch wielkości, czyli:

$$CC'' - CC' = C'C''.$$

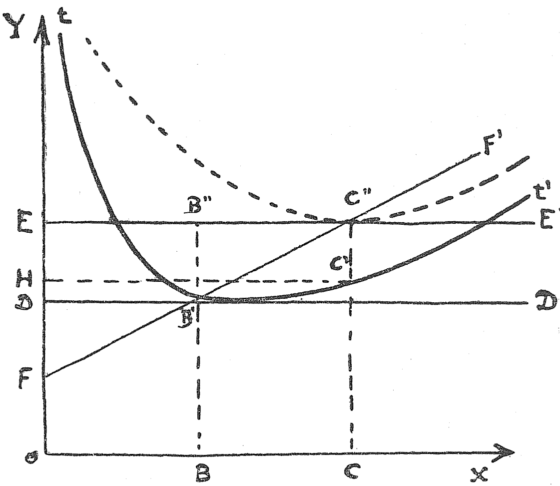
Dążąc zatem do osiągnięcia największej sumy zysków przedsiębiorstwo to zdecyduje się na przekroczenie tych rozmiarów produkcji, przy których osiągany był najniższy koszt średni, t. j. ilość OB, oraz na rozszerzenie ich aż do ilości OC.

To co powiedziane zostało powyżej możemy tak samo zilustrować graficznie dla funkcji kosztu średniego.

tt' na rys. 27 jest wykresem kosztu średniego. Dla ilości OB wypada najniższy średni koszt równy BB'. Jeżeli cena jednostkowa równa się najniższemu kosztowi średniemu, jej wykresem jest prosta DD', przechodząca przez punkt B'. Następna wyższa cena, reprezentowana jest przez prostą EE'. Prosta FF' jest wykresem kosztu krańcowego. Punkt przecięcia prostej EE' z prostą FF' (na wykresie punkt C'') oznacza zrównanie się kosztu krańcowego z ceną. Zrównanie to, a tem samem osiągnięcie maksymalnej sumy zysków, będzie miało miejsce dla wielkości produkcji równej OC. Przy tej wielkości produkcji zysk jednostkowy (na wykresie $C'C''$)

będzie wprawdzie niższy od zysku osiąganego przy wielkości produkcji równej *OB* (na wykresie *B'B''*), suma zysków będzie jednak większa. Na wykresie tym reprezentuje ją prostokąt *EHC'C''*. Na obu rysunkach, t. zn. na rys. 26 oraz na rys. 27 znajdują się jeszcze wykresy krzywych, wykreślone przy pomocy linij przerywanych. Znaczenie i sens tych krzywych będą omówione poniżej.

Przedsiębiorstwo to zatem uzyskuje obecnie, poza oprocentowaniem zainwestowanego kapitału, według bieżącej stopy procentowej (co zostało, stosownie do założeń, omówionych w rozdziale I, uwzględnione w kosztach produkcji), pewien nadzwyczajny dodatkowy zysk, dzięki zwyżce ceny produkowanego dobra. Przypuśćmy, że bieżąca stopa procentowa wynosi, powiedmy, 5%. Przypuśćmy dalej, że dzięki zwyżce ceny przedsiębiorstwo to daje obecnie, powiedzmy, 10% zysku. Jeżeli bieżąca stopa procentowa nie ulega zmianie i wynosi w dalszym ciągu 5%, możemy wówczas powiedzieć, że wobec tego przedsiębiorstwo to jest obecnie dwa razy więcej warte. Istotnie, o wartości przedsiębiorstwa rozstrzyga przecież jego rentowność i gdyby właściciel jego chciał je sprzedać, to sprzedałby je w obecnych warunkach za sumę dwukrotnie wyższą niż ta, którą sam w nie zainwestował wówczas, gdy dawało ono 5% zysku. Dotychczasowy właściciel może nie uwzględniać zmiany wartości przedsiębiorstwa i twierdzić, że ma z niego 10% zysku, dla nowego właściciela jednak wartość przedsiębiorstwa będzie dwukrotnie wyższa, z jego więc punktu widzenia będzie ono dawać tylko 5% zysku, dając nominalnie tę samą sumę zysków. Ten nadzwyczajny zysk, ta renta przedsiębiorcy, uzyskiwana przez poprzedniego właściciela dzięki zwyżce ceny, dla no-



Rys. 27.

wego właściciela będzie tylko oprocentowaniem według bieżącej stopy procentowej kapitału, zainwestowanego przezeń w tem przedsiębiorstwie. Możemy zatem traktować ten nadzwyczajny zysk poprostu jako oprocentowanie przyrostu wartości przedsiębiorstwa. Ten przyrost wartości zaś będzie to ów zysk, skapitalizowany według bieżącej stopy procentowej.

Przyrost wartości przedsiębiorstwa wpłynąć musi oczywiście na jego strukturę kosztów produkcji. Zmiana ta mianowicie polegać będzie na wzroście stałej sumy kosztów o oprocentowanie według bieżącej stopy procentowej przyrostu wartości przedsiębiorstwa czyli o sumę, równą maksymalnemu zyskowi. Oprocentowanie zainwestowanego kapitału bowiem jest niezależne od wielkości produkcji. Uwzględniając zatem w zmianie struktury kosztów przyrost wartości przedsiębiorstwa, spowodowany zwyżką ceny, można zadać teraz następujące pytanie: dla jakich rozmiarów produkcji otrzymam obecnie najniższy średni koszt jednostkowy?

Aby móc odpowiedzieć na to pytanie należy przedewszystkiem dokładnie stwierdzić, jakim zmianom ulegnie struktura kosztów. W tym celu trzeba stwierdzić, czemu będzie się równał maksymalny zysk. Wiemy już czemu się równa wielkość produkcji, dla której osiąga się maksymalny zysk. Równa się ona:

$$q = \frac{p - c}{2b}.$$

Tak określone q podstawmy teraz do równania funkcji sumy zysków. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} Z(q) &= p\frac{p-c}{2b} - b\left(\frac{p-c}{2b}\right)^2 - c\frac{p-c}{2b} - d \\ &= \frac{p^2 - pc}{2b} - \frac{p^2 - 2pc + c^2}{4b} - \frac{pc - c^2}{2b} - d \\ &= \frac{2p^2 - 2pc - p^2 + 2pc - c^2 - 2pc + 2c^2}{4b} - d \\ &= \frac{p^2 - 2pc + c^2}{4b} - d \\ &= \frac{(p-c)^2}{4b} - d. \end{aligned}$$

W ten sposób wiemy już, czemu się równa maksymalny zysk. Nazwijmy go h, tak że:

$$h = \frac{(p-c)^2}{4b} - d.$$

O to h należy teraz powiększyć stałą sumę kosztów. Równanie funkcji sumy kosztów będzie zatem teraz miało następującą postać:

$$F_1(q) = bq^2 + cq + d + h$$

a równanie funkcji jednostkowego kosztu średniego:

$$f_1(q) = bq + c + \frac{d+h}{q}.$$

Teraz możemy już obliczyć, dla jakiego rozmiaru produkcji będzie zachodzić najniższy koszt średni według tej nowej funkcji kosztu średniego.

$$f_1'(q) = b - \frac{d+h}{q^2}$$

$$bq^2 - d - h = 0$$

$$q^2 = \frac{d+h}{b}$$

$$q = \sqrt{\frac{d+h}{b}}.$$

Podstawmy teraz zamiast h otrzymaną powyżej wartość maksymalnego zysku. Otrzymamy:

$$q = \sqrt{\frac{d + \frac{(p-c)^2}{4b} - d}{b}}$$

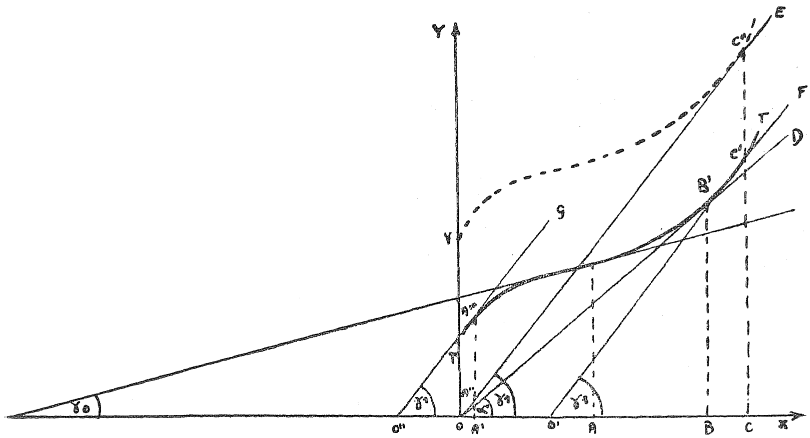
$$= \sqrt{\left(\frac{p-c}{2b}\right)^2}$$

$$= \frac{p-c}{2b}.$$

Okazuje się zatem, że najniższy średni koszt zostaje osiągnięty, przy uwzględnianiu przyrostu wartości przedsiębiorstwa, dla tych samych rozmiarów produkcji, dla których osiągana była maksymalna suma zysków bez uwzględniania przyrostu wartości przedsiębiorstwa.

Uwzględnienie przyrostu wartości przedsiębiorstwa wpłynęło na zmianę funkcji sumy kosztów i na zmianę funkcji kosztu średdniego, pozostaje jednak bez wpływu na funkcję kosztu krańcowego. Zmiana funkcji sumy kosztów polega wyłącznie na zmianie wyrazu wolnego, którego wielkość i ewentualne zmiany pozostają bez znaczenia dla funkcji kosztu krańcowego, jak była o tem mowa w rozdziale IV.

To uwzględnienie przyrostu wartości przedsiębiorstwa i jego wpływ na zmianę funkcji sumy kosztów i funkcji kosztu średniego,



Rys. 28.

znalazło swój wyraz na rys. 26, oraz na rys. 27, gdzie te nowe, zmienione funkcje zostały zaznaczone linjami krzywemi kreskowanemi. Na rys. 26 widzimy, że funkcja sumy kosztów uległa równoległemu przesunięciu wgórę na całym swoim przebiegu, o wielkość, równą maksymalnej sumie zysków, a więc o wielkość $C'C'' = TV$. Na wykresie tym zaznacza się również wyraziście fakt, że nowy najniższy koszt średni będzie wypadał dla tej samej wielkości produkcji, dla której poprzednio osiągana była maksymalna suma zysków i że będzie on równy cenie, oraz kosztowi krańcowemu, jaki wypada dla tej wielkości produkcji. Kreskowana krzywa na rys. 27 oznacza, jakim zmianom ulegnie funkcja kosztu średniego dzięki przyrostowi wartości przedsiębiorstwa.

W wypadku gdy mamy do czynienia z sumą kosztów, wzrastającą nieproporcjonalnie w stosunku do wielkości produkcji, funkcja sumy zysków będzie miała postać:

$$Z(q) = p \cdot q - aq^3 - bq^2 - cq - d.$$

Pochodna tej funkcji równa się:

$$Z'(q) = p - 3aq^2 - 2bq - c.$$

Jeżeli przyrównamy ja do zera, otrzymamy:

$$p - 3aq^2 - 2bq - c = 0$$

a więc równanie drugiego stopnia, które ma dwa pierwiastki. Napiszmy to równanie w formie:

$$3aq^2 + 2bq + c - p = 0$$

i znajdźmy rozwiązanie dla q:

$$q_{1,2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 3a(c-p)}{9a^2}}.$$

Z chwilą gdy cena przewyższa najniższy koszt średni (a oczywiście tylko wówczas można mówić o zyskach) mogą zachodzić następujące trzy wypadki:

Po pierwsze, jeżeli $p = c$, to wówczas jedna z wartości q będzie równa zeru, gdyż wówczas wyrażenie zawarte pod pierwiastkiem w podanym powyżej wzorze będzie równe wyrażeniu przed pierwiastkiem ze znakiem przeciwnym, druga zaś wartość q będzie większa od zera (raz jeszcze przypominam, że w rozpatrywanym wypadku sumy kosztów b jest ujemne), więc da nam odpowiedź na pytanie, przy jakich rozmiarach produkcji osiągnięta będzie maksymalna suma zysków.

Po drugie, jeżeli $p > c$, to wówczas jedna z wartości q będzie ujemna, gdyż wyrażenie zawarte pod pierwiastkiem w podanym wzorze będzie wówczas większe od wyrażenia, znajdującego się przed pierwiastkiem. Druga natomiast wartość q będzie dodatnia, otrzymamy więc znowu tylko jedno ważne dla nas rozwiązanie.

Po trzecie, jeżeli $p < c$, to wówczas, dzięki temu, że w tym wypadku wyrażenie zawarte pod pierwiastkiem będzie mniejsze od wyrażenia, znajdującego się przed pierwiastkiem, otrzymamy z podanego wzoru dwie różne wartości na q i obie dodatnie.

W tym wypadku pochodna funkcji zysków będzie dwukrotnie równa zeru, a mianowicie dla obu tych wartości q. Powstaje wobec tego kwestja, dla której z tych dwóch wartości q funkcja sumy zysków osiągnie maksimum? Możemy się o tem przekonać badając drugą pochodną funkcji zysków. To druga pochodna równa się:

$$Z''(q) = -6aq - 2b.$$

Podstawny teraz kolejno pod q w powyższem równaniu wartości na q, otrzymane z podanego powyżej wzoru, a więc najpierw:

$$q_1 = -\frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{b^2 - 3a(c-p)}}{3a}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} Z''(q) &= -6a\left(-\frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{b^2 - 3a(c-p)}}{3a}\right) - 2b \\ &= 2b - 2\sqrt{b^2 - 3a(c-p)} - 2b \\ &= -2\sqrt{b^2 - 3a(c-p)}. \end{aligned}$$

Dla większej wartości q druga pochodna funkcji sumy zysków jest ujemna. Podstawmy teraz q równe:

$$q_2 = -\frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{b^2 - 3a(c-p)}}{3a}.$$

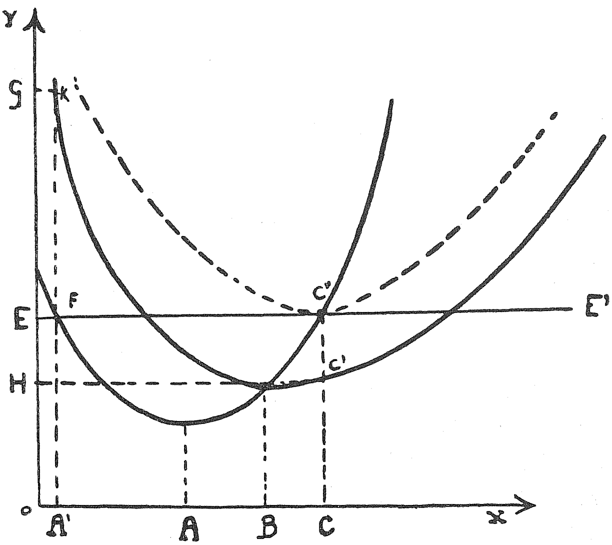
Otrzymamy:

$$\begin{aligned} Z''(q) &= -6a\left(-\frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{b^2 - 3a(c-p)}}{3a}\right) - 2b \\ &= 2\sqrt{b^2 - 3a(c-p)}. \end{aligned}$$

Dla mniejszej wartości q druga pochodna funkcji sumy zysków jest dodatnia.

A więc, dla mniejszej wartości q, dla której jej pierwsza pochodna jest równa zeru, t. zn. dla tej wartości q, dla której jej druga pochodna jest dodatnia, funkcja sumy zysków osiągnie swe minimum. Ta m n i e j s z a w a r t o ś ć q oznaczać będzie te rozmiary produkcji, przy których dane przedsiębiorstwo będzie miało n a j w i ę k s z e s t r a t y. Dla drugiej, większej, wartości q natomiast, dla której jej pierwsza pochodna będzie równa zeru, t. zn. dla tej wartości q, dla której jej druga pochodna będzie ujemna, funkcja sumy zysków osiągnie swe maksimum. Czyli, ta w i ę k s z a w a r t o ś ć q oznaczać będzie te rozmiary produkcji, przy których dane przedsiębiorstwo będzie miało n a j w i ę k s z e z y s k i.

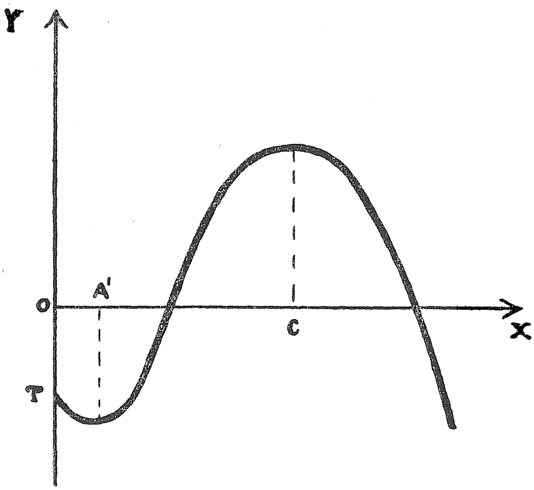
Tę właśnie ostatnio omówioną sytuację ilustrują wykresy na rys. 28 i na rys. 29. Są one zupełnie analogiczne do omówionych powyżej, nie wymagają więc już szczegółowych objaśnień. Jedyną różnicą jest, że ponieważ obecnie mamy do czynienia z kosztem krańcowym nie stale i wprost proporcjonalnie rosnącym, jak poprzednio, ale początkowo malejącym, a następnie wzrastającym, zaznaczone są więc te rozmiary produkcji, dla których uzyskiwany



Rys. 29.

jest najniższy koszt krańcowy. Będą to rozmiary produkcji równe *OA*. Zaznaczone są również nietylko te rozmiary produkcji (równe *OC*), dla których osiąga się maksymalną sumę zysków (równą *C'C''*), ale i te (a mianowicie równe *OA'*), dla których osiąga się maksymalną sumę strat (równą *A''A'''*). Najniższy koszt średni osiągany jest dla rozmiarów produkcji, równych *OB* (patrz rys. 28).

Na wykresie na rys. 29 maksymalna suma strat oznaczona jest przez prostokąt *EFGK*, a maksymalna suma zysków przez prostokąt *EHC'C''*. Na obu rysunkach (t. j. na rys. 28 oraz na rys. 29) uwzględniony został również spowodowany zwyżką ceny przyrost wartości przedsiębiorstwa i wywołane nim zmiany w przebiegu obu funkcyj. Nowe te funkcje reprezentowane są na obu rysunkach przez linje krzywe kreskowane. Analogicznie, jak w poprzednio rozpatrywanym wypadku, dla tych rozmiarów produkcji, dla których osiągana była maksymalna suma zysków, wówczas, gdy nie brano pod uwagę przyrostu wartości przedsiębiorstwa, obecnie osiągany będzie najniższy koszt średni.



Rys. 30.

Wykres na rys. 30 przedstawia przebieg funkcji sumy zysków. Dla rozmiarów produkcji równych zeru zmienna suma kosztów równa się zero. Natomiast stała suma kosztów pozostaje niezmieniona i równa się wówczas sumie strat. Na wykresie tym reprezentuje ją odcinek *OT*. Dla produkcji równej *OA'* funkcja sumy zysków osiąga swe minimum (reprezentuje ona wówczas maksymalną sumę strat). Dla produkcji równej *OC* funkcja sumy zysków osiąga swe maksimum. Punkty przecięcia osi x-w przez funkcję sumy zysków oznaczają te rozmiary produkcji, dla których funkcja sumy zysków równa się funkcji sumy kosztów, te rozmiary więc dla których niema ani zysków, ani strat.

ROZDZIAŁ VII.

Funkcja sumy kosztów a funkcja ilości.

Dotychczasowe rozważania polegały na rozpatrywaniu zmian, wywołanych w rozmiarach sumy kosztów, kosztu jednostkowego i kosztu krańcowego, przez zmiany w ilości produkowanych jednostek danego dobra. Rozważania te opierały się więc na założeniu, że koszty (zarówno suma kosztów, jak średni koszt jednostkowy i koszt krańcowy) są funkcją ilości produkowanej, co było wyrażone podstawowem ogólnem równaniem sumy kosztów:

$$K = F(q)$$

z którego zostało następnie wyprowadzone ogólne równanie średniego kosztu jednostkowego:

$$k = \frac{F(q)}{q} = f(q)$$

oraz ogólne równanie kosztu krańcowego:

$$k_g = F'(q) = \varphi(q).$$

Spróbujmy teraz zmodyfikować w pewien sposób to podstawowe założenie, a modyfikacja ta niech polega na przyjęciu, że nie suma kosztów produkcji jest funkcją ilości produkowanej, ale że ilość produkowana jest funkcją sumy kosztów. Podstawowem równaniem będzie zatem nie równanie sumy kosztów, lecz równanie ilości, co można wyrazić w następujący sposób:

$$q = \Theta(K).$$

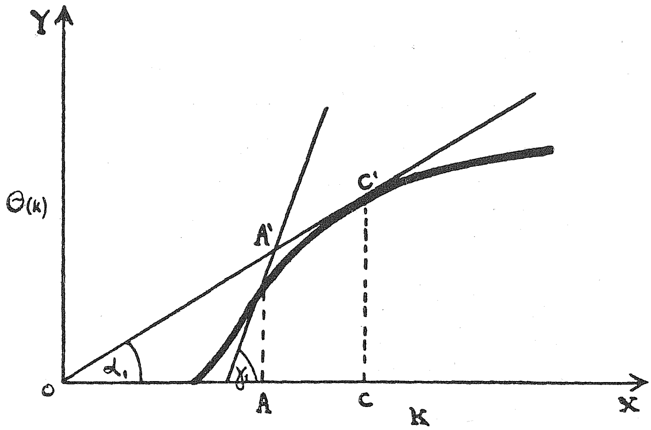
Jaki jest sens tego wyrażenia? Sens jest ten, że tak samo jak można zadawać pytanie, jakiego rodzaju zmiany w sumie kosztów wywoła powiększenie produkcji, można również zapytać, jakie zmiany uzyska się w ilości produkowanych jednostek, powiększając nakłady produkcyjne, czego wyrazem oczywiście musi być odpowiednie powiększenie sumy kosztów produkcji [1].

Jeżeli teraz, jako cechę charakterystyczną funkcji sumy kosztów (oznaczonej symbolem $F(q)$) przyjmiemy, że wzrasta ona nieproporcjonalnie do wzrostu ilości produkowanej, t. zn. równym przyrostom ilości będą odpowiadały początkowo malejące, a następnie wzrastające przyrosty sumy kosztów, to wówczas funkcja odwrotna, utworzona z tego rodzaju funkcji sumy kosztów, t. zn. funkcja ilości (oznaczona symbolem $\Theta(K)$), będzie również wzrastać nieproporcjonalnie, a mianowicie w ten sposób, że równym przyrostom kosztów będą odpowiadały początkowo rosnące, a następnie malejące

[1] Obecne rozumowanie opiera się, analogicznie jak poprzednie, na założeniu »ceteris paribus«, co w tym wypadku oznacza, że ceny czynników produkcji przyjmuje się jako niezmienne, t. zn. niezależnie od takiej czy innej działalności danego przedsiębiorcy. W tych warunkach każde powiększenie sumy kosztów musi być równoznaczne z powiększeniem ilości zatrudnionych czynników produkcji, czyto w postaci zwiększonych inwestycyj kapitałowych, czy też w postaci zwiększenia ilości zatrudnionych robotników i ilości zużywanego surowca.

p r z y r o s t y i l o ś c i w y r o d u k o w a n y c h j e d n o s t e k. Graficzną ilustracją takiej funkcji ilości jest wykres na rys. 31.

Na osi x-ów oznaczone są kolejne, równe nakłady, czyli jednostki kosztów, a na osi y-ów ilości wyprodukowanych jednostek danego dobra. Odcinek OT na osi x-ów oznacza te koszty, jakie muszą być poniesione nawet wówczas, gdy nic się nie produkuje. Dlatego początek wykresu tej »krzywej ilości« nie wychodzi z po-



Rys. 31.

czątku układu współrzędnych, lecz jest odsunięty na prawo wzdłuż osi x-ów aż do punktu T. Wykres ten, stosownie do uczynionych założeń, wznosi się ku górze początkowo szybciej, a następnie coraz wolniej, tak jak ilości wyprodukowanych jednostek początkowo rosną, a następnie maleją.

Funkcje ilości, będące funkcjami odwrotnemi funkcyj kosztów innych kategoryj, nie będą w rozdziale niniejszym rozpatrywane, gdyż nie wniosłyby one nic nowego do omawianych obecnie zagadnień.

Z tego nowego podstawowego równania, t. j. z równania ilości, możemy wyprowadzić dalsze równania, analogicznie jak z równania sumy kosztów. Możemy więc przedewszystkiem badać stosunek otrzymanego rezultatu produkcji (ilości wyprodukowanych jednostek) do poniesionych kosztów. Będzie to zatem odwrócenie problemu średniego kosztu jednostkowego. Przy obliczaniu średniego kosztu jednostkowego chodziło o odpowiedź na pytanie, i l e j e d n o s t e k k o s z t ó w przypada przeciętnie n a j e d n ą wyprodukowaną jednostkę przy danej wielkości produkcji. Obecnie pytanie będzie brzmiało: ile jednostek danego produkowanego dobra przypada przeciętnie na jedną jednostkę kosztów, przy danej sumie kosztów, czyli innemi słowami, jaka jest przeciętna wydajność jednej jednostki nakładu (kosztów). Pytania te są równoważne w tym sensie, że maleniu kosztu średniego będzie odpowiadał wzrost przeciętnej wydajności jednostki nakładu, a wzrostowi kosztu średniego malenie przeciętnej wydajności. Najniższy zaś średni koszt będzie odpowiadał wydajności największej[1]. Tę przeciętną wydajność jednostki nakładu, którą można nazwać przeciętnym rezultatem jednostkowym, możemy obliczyć mając następujące dane: ogólną ilość wyprodukowanych jednostek, czyli wielkość produkcji będącą funkcją sumy kosztów, oraz ilość jednostek kosztów czyli sumę kosztów. Przeciętny rezultat jednostkowy, który oznaczmy symbolem q_j, będzie ilorazem tych dwóch danych, czyli:

$$q_j = \frac{\Theta(K)}{K} = \vartheta(K).$$

Na wykresie na rys. 31 przeciętny rezultat reprezentowany jest przez stosunek rzędnej od odciętej, a więc CC' do OC, a że

$$\frac{CC'}{OC} = \operatorname{tg} \alpha_1$$

możemy więc powiedzieć, że tangens α_1 jest to przeciętny rezultat. Będzie on największy wówczas gdy prosta OC', wychodząca z początku układu współrzędnych, przyjmie w stosunku do krzywej ilości położenie nie siecznej, lecz stycznej, wówczas bowiem kąt α_1, a więc i jego tangens będzie największy.

W wypadku sumy kosztów, wzrastającej nieproporcjonalnie, przyrost sumy kosztów, czyli koszt wyprodukowania jednej dodat-

---

[1] Związki zachodzące między średnim kosztem i przeciętnym rezultatem możemy wyrazić w następujący sposób:

gdy $f'(q) < 0$ to wówczas $\vartheta'(K) > 0$
gdy $f'(q) > 0$ to wówczas $\vartheta'(K) < 0$
gdy $f'(q) = 0$ to wówczas $\vartheta'(K) = 0$

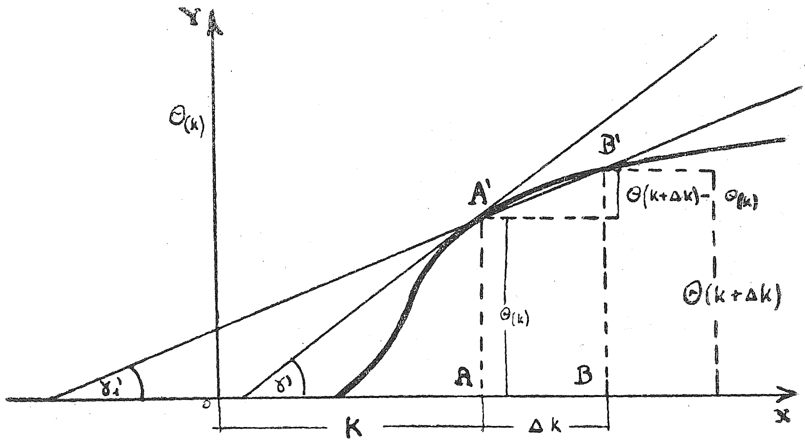
ale

gdy $f'(q) = 0$ to wówczas $f''(q) > 0$

a natomiast

gdy $\vartheta'(K) = 0$ to wówczas $\vartheta''(K) < 0$.

kowej jednostki ponad daną wielkość produkcji, dla oznaczenia którego został użyty termin koszt krańcowy, początkowo maleje i po osiągnięciu swego minimum, wzrasta. Fakt ten, że koszt krańcowy jest różny dla różnych wielkości produkcji czyli, że różne są koszty wyprodukowania poszczególnych jednostek, można wyrazić w inny jeszcze sposób. Na podstawie założenia, że ilość produkowana jest funkcją sumy kosztów i że funkcja ta wzrasta nie-



Rys. 32.

proporcjonalnie, możemy powiedzieć, że rezultaty poszczególnych jednostek nakładów są różne. Co oznacza wyrażenie »rezultat poszczególnej jednostki nakładu«? Przypuśćmy, że mogę podzielić nakłady produkcyjne, jakie mają być uczynione celem wyprodukowania pewnego dobra, na równe dozy i dalej, że można je aplikować kolejno w dowolnych ilościach. Przypuśćmy dalej, że zostało już użytych K dóz nakładów. Rezultatem tej ilości nakładów jest ilość wyprodukowanych jednostek równa $\Theta(K)$. Jeżeli teraz nakłady produkcyjne zostaną powiększone o dalsze dozy, np. o ΔK, to ogólna ilość wyprodukowanych jednostek będzie się teraz równać $\Theta(K+\Delta K)$. Dodatkowy rezultat, uzyskany dzięki powiększeniu ilości nakładów o ΔK dóz będzie zatem wynosił

$$\Theta(K+\Delta K)-\Theta K$$

czyli różnicę wielkości produkcji, uzyskanej przy K nakładach i wielkości produkcji, uzyskanej przy $(K+\Delta K)$ nakładach. Jest to więc p r z y r o s t produkcji, uzyskany dzięki p r z y r o s t o w i nakładów, równemu ΔK. Przeciętny rezultat, przypadający na jedną jednostkę tego dodatkowego nakładu można otrzymać dzieląc przyrost produkcji przez przyrost nakładów. Iloraz zaś ten to będzie tangens kątą γ'_1, a więc:

$$\frac{\Theta(K + \Delta K) - \Theta(K)}{\Theta K} = \operatorname{tg} \gamma'_1.$$

Ilustracją tego związku jest wykres na rys. 32.

Jeżeli teraz ΔK będę dobierał coraz mniejsze to prosta $O'A'B'$, będąca sieczną krzywej ilości w punktach A' i B', będzie dążyła do położenia prostej HA', będącej styczną do krzywej ilości w punkcie A', a kąt γ'_1 będzie dążył do zrównania się z kątem γ_1. A więc:

$$\text{gdy } \Delta K \to 0 \text{ to wówczas } \gamma'_1 \to \gamma_1$$
$$\text{gdy } \gamma'_1 \to \gamma_1 \text{ to wówczas } \operatorname{tg} \gamma'_1 \to \operatorname{tg} \gamma_1.$$

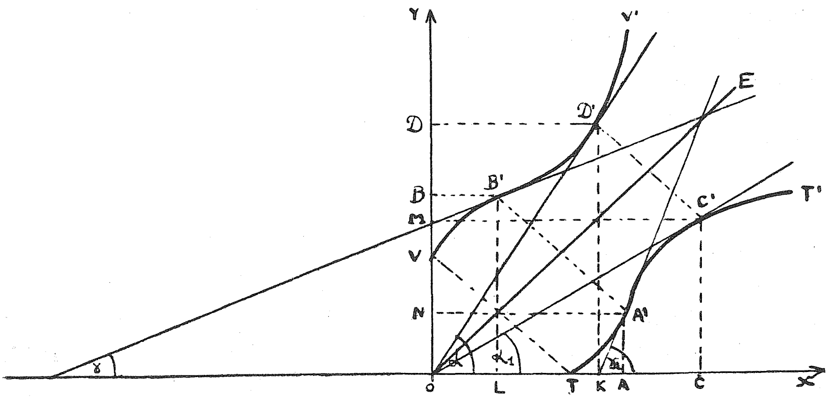
Tangens kąta γ_1, czyli pochodna funkcji ilości będzie to zatem (w przybliżeniu) przyrost ilości wyprodukowanej, uzyskany dzięki zwiększeniu nakładów produkcyjnych o bardzo niewielką ilość, np. o jedną jednostkę. Jeżeli ten przyrost ilości czyli ten rezultat, liczony w jednostkach wyprodukowanych, jaki wywołuje powiększenie nakładów o jedną dodatkową jednostkę, nazwę rezultatem granicznym i oznaczę symbolem q_g, to wtedy mogę napisać:

$$q_g = \Theta'(K) = \Psi(K).$$

Powiedzenie, że koszty produkcji poszczególnych jednostek są różne, czyli że równym przyrostom produkcji odpowiadają różne przyrosty kosztów jest zatem równoznaczne z powiedzeniem, że równym przyrostom kosztów (nakładów) odpowiadają różne przyrosty produkcji. Faktowi zaś, że koszt krańcowy początkowo maleje, a potem wzrasta odpowiada w obecnem ujęciu fakt, że wyrażony w ilościach jednostek wyprodukowanych rezultat poszczególnych równych przyrostów kosztów najpierw wzrasta, osiąga swe maksimum, a następnie maleje.

Malejącemu kosztowi krańcowemu odpowiada więc wzrastający rezultat poszczególnych kolejnych jednostek nakładu, wzrastającemu zaś kosztowi krańcowemu odpowiada rezultat malejący. Najniższy koszt krańcowy oznacza w obecnem ujęciu ten punkt, w którym rezultat poszczególnej jednostki nakładu jest najwyższy [1]. Na wykresie na rys. 32 rezultat graniczny reprezentowany jest przez tangens kąta przecięcia stycznej do krzywej ilości z osią x-ów, a więc przez tangens γ_1. Rezultat graniczny będzie zatem najwyższy wówczas gdy kąt γ_1, a tem samem jego tangens, będzie największy.

Związki, jakie zachodzą między rezultatem przeciętnym a rezultatem granicznym, są zupełnie analogiczne do związków kosztu



Rys. 33.

średniego z kosztem krańcowym. W rozdziale VI widzieliśmy, że najniższy koszt krańcowy zostaje osiągnięty przy wielkości produkcji mniejszej niż ta, przy której zostaje osiągnięty najniższy koszt średni. Tak samo obecnie, najwyższy rezultat graniczny otrzymamy przy wysokości nakładów produkcyjnych niższej niż ta, przy której otrzymamy najniższy rezultat przeciętny. Zrównanie

---

1 Związki, zachodzące między kosztem krańcowym a rezultatem granicznym, można przedstawić analogicznie jak przedstawione były poprzednio związki między kosztem średnim i przeciętnym rezultatem, a mianowicie:

$$\frac{1}{F'(q)} = \frac{1}{\varphi(q)} = \Theta'(K) = \Psi(K)$$

$$\text{gdy } \varphi'(q) < 0 \text{ to wówczas } \Psi'(K) > 0$$

$$\text{gdy } \varphi'(q) > 0 \text{ to wówczas } \Psi'(K) < 0$$

$$\text{gdy } \varphi'(K) = 0 \text{ to wówczas } \Psi'(K) = 0$$

ale

$$\text{gdy } \varphi'(q) = 0 \text{ to wówczas } \varphi''(q) > 0$$

a natomiast

$$\text{gdy } \Psi'(K) = 0 \text{ to wówczas } \Psi''(K) < 0.$$

kosztu krańcowego z kosztem średnim miało miejsce dla tej wielkości produkcji, przy której miał miejsce najniższy koszt średni, zrównanie zaś rezultatu granicznego z rezultatem przeciętnym będzie miało miejsce przy tej wysokości nakładu, przy której ma miejsce najwyższy rezultat przeciętny. Istotnie, na wykresie na rys. 31 widzimy, że najwyższy rezultat graniczny zostaje osiągnięty przy sumie kosztów równej odcinkowi OA na osi x-ów, a najwyższy rezultat przeciętny przy sumie kosztów równej odcinkowi OC, większemu od poprzedniego o AC i wreszcie, że przy tej ostatniej sumie kosztów nastąpi zrównanie rezultatu przeciętnego z granicznym [1].

Wykres na rys. 33 ilustruje wszystkie te związki i współzależności. Wykres ten został skostruowany w następujący sposób. Krzywa $VB'D'V'$ jest to krzywa sumy kosztów, wykreślona na podstawie założenia, że

$$K = F(q).$$

Krzywa $TA'C'T'$ natomiast jest to krzywa sumy jednostek wyprodukowanych (krzywa ilości), wykreślona na podstawie założenia, że

$$q = \Theta(K).$$

Funkcje, których te krzywe są wykresami, są to więc t. zw. funkcje odwrotne. Dla wykresu funkcji kosztów na osi x-ów odmierzane są ilości produkowanych jednostek, a na osi y-ów odpowiadające im sumy kosztów, podczas gdy dla wykresu funkcji ilości na osi x-ów są odmierzane jednostki kosztów, a na osi y-ów odpowiadające im ogólne ilości wyprodukowanych jednostek danego dobra. Jeżeli teraz przeprowadzę przez środek układu współrzędnych dwusieczną OE i jeżeli w dowolnym punkcie przeprowadzę prostą do niej prostopadłą, to punkty przecięcia tej prostopadłej z krzywą kosztów ilości będą leżały po obu stronach dwusiecznej OE i na równej od niej odległości. Odcięta punktu przecięcia prostopadłej do dwusiecznej z jedną z tych krzywych będzie równa rzędnej punktu przecięcia tej samej prostopadłej z drugą krzywą,

[1] Związki między rezultatem przeciętnym i rezultatem granicznym można przedstawić w sposób następujący:

gdy $\vartheta'(K) > 0$ to wówczas $\vartheta(K) < \Psi(K)$
gdy $\vartheta'(K) < 0$ to wówczas $\vartheta(K) > \Psi(K)$
gdy $\vartheta'(K) = 0$ to wówczas $\vartheta(K) = \Psi(K)$.

a rzędna pierwszego punktu będzie równa odciętej drugiego. A więc dla punktu T, leżącego na krzywej ilości $TA'C'T'$ jego odcięta równa się rzędnej punktu V, leżącego na krzywej kosztów $VB'D'V'$, czyli:

$$OT = OV.$$

Rzędna punktu T równa się zeru i odcięta punktu V równa się zeru. Tak samo odcięta punktu A' równa się rzędnej punktu B', czyli:

$$OA = OB.$$

A rzędna punktu A' równa się odciętej punktu B', czyli:

$$ON = OL.$$

I wreszcie odcięta punktu C' równa się rzędnej punktu D', czyli:

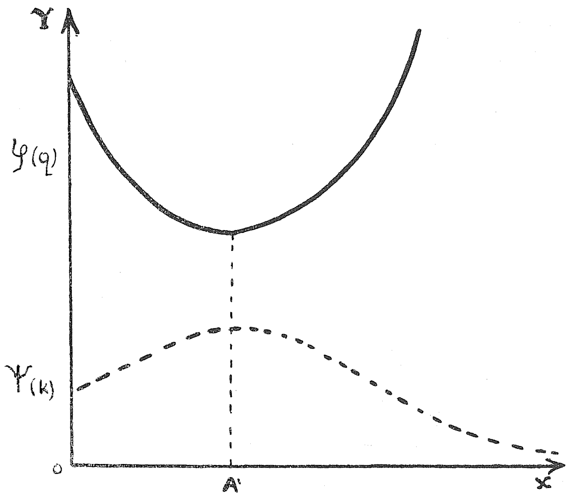
$$OC = OD.$$

A rzędna punktu C' równa się odciętej punktu D', czyli:

$$OM = OK.$$

Jaki sens mają te równości? OT z punktu widzenia funkcji ilości wyobraża te koszty, które muszą być poniesione nawet wówczas, gdy ilość produkowana równa się zeru, a zatem stałą sumę kosztów reprezentuje OV dla krzywej kosztów. OA jest to ta ilość nakładów produkcyjnych, czyli ta suma kosztów, i ON ta wielkość produkcji, przy której zachodzi najwyższy rezultat graniczny, podczas gdy OB jest to ta suma kosztów i OL ta wielkość produkcji, przy której zachodzi najniższy koszt krańcowy. OC i OM reprezentują tę sumę kosztów i tę wielkość produkcji, dla której mamy najwyższy rezultat przeciętny na jednostkę kosztów, a OD i OK tę sumę kosztów i tę wielkość produkcji, dla której mamy najniższy średni koszt jednostkowy. Innemi słowami, jeżeli kąt przecięcia stycznej do krzywej kosztów z osią x-ów nazwiemy γ, a kąt przecięcia stycznej do krzywej ilości z osią x-ów γ_1, to kąt γ a więc i jego tangens, t. zn. koszt krańcowy, będzie najmniejszy dla wielkości produkcji OL równej ON, czyli wielkości produkcji, dla której kąt γ_1, a więc i jego tangens, t. zn. rezultat graniczny, będzie największy. I podobnie, jeżeli poprowadzimy prostą, łączącą początek układu współrzędnych z dowolnym punktem, leżącym na krzywej kosztów, a kąt utworzony przez tę prostą z osią x-ów nazwiemy α, oraz tak samo połączymy prostą dowolny punkt na krzywej ilości z początkiem układu, a kąt utworzony przez tę drugą prostą z osią x-ów nazwiemy α_1, to kąt α, a tem samem jego tangens, czyli średni koszt jednostkowy, będzie najmniejszy dla wielkości produkcji OK równej OM, t. j. tej wielkości produkcji, dla której kąt α_1, a tem samem jego tangens, czyli przeciętny rezultat na jednostkę nakładu, jest największy.

Te związki, a szczególnie ważny dla nas, ze względu na problemy, omawiane w następnym rozdziale, związek, zachodzący między kosztem krańcowym a rezultatem granicznym, można graficznie przedstawić tak, by wystąpiły one wyraźniej niż na wykresie na rys. 33. Możemy mianowicie zrobić wykres kosztu krańcowego i wykres rezultatu granicznego na tym samym rysunku (patrz rys. 34). Wykres kosztu krańcowego zrobiony jest linją krzywą ciągłą, zaś wykres rezultatu granicznego linją krzywą kreskowaną. Wykresy te zrobione zostały na tej podstawie, że pochodna funkcji odwrotnej jest odwrotnością pochodnej funkcji zasadniczej, czyli:



Rys. 34.

$$\Theta'(K) = \frac{1}{F'(q)}.$$

Jak wiemy zaś $\Theta'(K)$ jest to rezultat graniczny, a $F'(q)$ jest to koszt krańcowy. Ten związek, zachodzący między pochodnemi funkcyj odwrotnych, możemy więc przedstawić w formie:

$$\Psi(K) = \frac{1}{\varphi(q)} \quad \text{albo:} \quad \Psi(K) \times \varphi(q) = 1.$$

W tem sformułowaniu i na tym wykresie występuje zupełnie wyraźnie fakt, że funkcja rezultatu granicznego osiągnie swe maksimum dla tej samej wielkości produkcji (OA' na wykresie na rys. 34), dla której funkcja kosztu krańcowego osiągnie minimum. W dalszym przebiegu, w miarę wzrostu funkcji kosztu krańcowego, funkcja rezultatu granicznego będzie maleć i będzie zbliżać się asymptotycznie do osi x-ów.

Analogicznie również może być przedstawiony graficznie związek między kosztem średnim i rezultatem przeciętnym.

ROZDZIAŁ VIII.

Prawo nieproporcjonalnych przychodów.

Rozważania poprzedniego rozdziału pozwalają na wysnucie pewnych wniosków co do t. zw. »prawa« nieproporcjonalnych, czyli zwiększających się i zmniejszających się przychodów. Ogólnym przychodem fizycznym jest ogólna ilość jednostek pewnego dobra, wyprodukowana przy pomocy nakładów danej wysokości. Z chwilą, gdy nakłady osiągają wysokość np. OC, jak na rys. 31, ogólny przychód fizyczny będzie się wówczas równał CC'. Przeciętny przychód fizyczny na jednostkę nakładu będzie równy tangensowi kąta α_1. Dla każdej ilości nakładów możemy obliczyć wzrost ogólnego przychodu fizycznego, spowodowany powiększeniem nakładów o jedną, dodatkową jednostkę. W ten sposób możemy zbadać przychód fizyczny, przypadający na każdą poszczególną jednostkę nakładu i zmiany, jakim on ulega dla różnych kolejnych jednostek. Przychód przypadający na każdą dodatkową jednostkę nakładu, będzie równy pochodnej funkcji ilości w danym punkcie, a więc jak na rys. 32 tangensowi kąta γ_1. Tąk zdefinjowane pojęcie przychodu odpowiada, a właściwie jest identyczne z omawianem powyżej pojęciem wydajności, czy rezultatu. Przychód fizyczny, największy na jedną poszczególną jednostkę nakładu, będzie odpowiadał zatem najniższemu kosztowi krańcowemu, a przeciętnie największy przychód fizyczny na jednostkę nakładu będzie odpowiadał najniższemu średniemu kosztowi jednostkowemu.

Ogólnie więc możemy powiedzieć: Jeżeli jakieś przedsiębiorstwo ma strukturę kosztów tego rodzaju, że suma kosztów wzrasta nieproporcjonalnie do wzrostu produkcji, to jeżeli produkcja tego przedsiębiorstwa jest tych rozmiarów, że powiększenie jej wywoła zniżkę kosztu krańcowego, wówczas można powiedzieć, że w wypadku tym mamy do czynienia z prawem zwiększających się przychodów, jeżeli zaś produkcja tego przedsiębiorstwa jest tych rozmiarów, że powiększenie jej wywoła zwyżkę kosztu krańcowego, wówczas można powiedzieć, że w tym wypadku mamy do czynienia z prawem zmniejszających się przychodów. Czy i ewentualnie kiedy nastąpi przekroczenie tego punktu, optymalnego z punktu widzenia przychodu na jednostkę nakładu, t. zn. tego punktu, w którym dana jednostka nakładu da najwyższy przychód?

Jak była o tem mowa w rozdziałach poprzednich, a szczególnie w rozdziale VI, osiągnięcie tych rozmiarów produkcji, przy których uzyskuje się najniższy średni koszt jednostkowy, zmusza do przekroczenia punktu najniższego kosztu krańcowego.

A więc: Każde przedsiębiorswo o strukturze kosztów tego rodzaju, że suma kosztów wzrasta nieproporcjonalnie do wzrostu produkcji, o ile tylko zbliża się do osiągnięcia tych rozmiarów produkcji, przy których osiąga najniższy średni koszt jednostkowy, pracuje już w sferze działania prawa zmniejszających się przychodów.

Dążenie do osiągnięcia najniższego kosztu średniego jest, rzecz prosta, dążeniem każdego przedsiębiorcy i jest ono już dostatecznym powodem do przekroczenia tych rozmiarów produkcji, które odpowiadają sferze działania prawa zwiększających się przychodów i do rozszerzenia jej na sferę działania prawa zmniejszających się przychodów. Sam fakt przekroczenia tej granicy niema nic wspólnego ani z kwestją zwyżki ceny danego dobra, ani z kwestją ograniczoności pewnych czynników produkcji. Fakt jej przekroczenia będzie miał miejsce zawsze i w każdym rodzaju produkcji, w którym mamy do czynienia z sumą kosztów, wzrastającą nieproporcjonalnie. Zwyżka ceny i ograniczoność niektórych czynników produkcji mogą tylko determinować, jak głęboko wkroczy produkcja w sferę działania prawa zmniejszających się przychodów.

Wpływ zwyżki ceny danego dobra na rozmiary produkcji, w ramach danego przedsiębiorwstwa, był omawiany w rozdziale VI. Z rozdziału tego wiemy, że zwyżka ceny produkowanego dobra wpływa na rozszerzenie produkcji poza ten rozmiar, dla którego zachodzi najniższy koszt średni. Względnie, jeśli zysk, wynikający ze zmiany ceny, zostanie skapitalizowany według bieżącej stopy procentowanej i uwzględniony w wartości bilansowej przedsiębiorstwa, to zwyżka ceny wpływa na rozszerzenie produkcji aż do osiągnięcia nowego najniższego kosztu średniego. Ten nowy najniższy koszt średni będzie wyższy od poprzedniego dzięki zwyżce jednego z elementów kosztów produkcji, a mianowicie dzięki zwyżce stałej sumy kosztów.

Najniższy koszt krańcowy natomiast, ani z punktu widzenia jego wysokości, ani z punktu widzenia rozmiarów prokukcji, dla których ma miejsce, nie ulegnie żadnej zmianie, ponieważ, jak była już o tem mowa powyżej w rozdziale V, stała suma kosztów oraz jej zmiany nie wywierają żadnego wpływu na kształtowanie się kosztu krańcowego. Jeżeli zaś najniższy koszt krańcowy pozostaje niezmieniony, to tem samem pozostaje bez zmiany najwyższy rezultat graniczny, czyli najwyższy przychód w stosunku do poszczególnej dozy, czy jednostki kosztów (nakładu). Zwyżka ceny produkowanego dobra powoduje więc jeszcze dalsze przesunięcie produkcji w sferę działania prawa zmniejszającego się przychodu (patrz rys. 29 w rozdziale VI). Z tego punktu widzenia zwyżka ceny powoduje więc zmiany o charakterze nie jakościowym, lecz tylko ilościowym. Jakie dalsze konsekwencje pociąga za sobą zwyżka ceny?

Zwyżka ceny, czyli inaczej mówiąc zwyżka zysków, względnie wartości zakładów wytwóczych, produkujących dane dobra, oczywiście zachęca do tworzenia nowych przedsiębiorstw. W warunkach wolno konkurencyjnych zatem nic nie stoi na przeszkodzie aby przypływ kapitału i pracy do danej gałęzi produkcji trwał tak długo, aż te nadzwyczajne zyski, względnie te nadzwyczajne przyrosty wartości przedsiębiorstw, nie ulegną likwidacji. Ostatecznie więc, o ile utrzymamy założenie, że ceny czynników produkcji, a więc oprocetowanie kapitału, wynagrodzenie za pracę, oraz wszelkiego rodzaju renty, pozostają wciąż niezmienione, cena danego dobra wskutek zwiększenia podaży będzie się stopniowo obniżać, aż dojdzie do poziomu dawnego najniższego kosztu średniego, co znowu skolei wpłynie na odpowiednie dostosowanie produkcji przez poszczególne przedsiębiostwa.

Tego rodzaju przebieg wypadków nie będzie jednak mógł mieć w pełni miejsca, jeżeli przyjmiemy jako założenie ograniczoność przynajmniej jednego z czynników produkcji. Czynnikiem, którego ograniczoność występuje najczęściej i w najostrzejszej formie, jest w pierwszym rzędzie ziemia. O ile zatem powyższe uwagi odnieść można do produkcji przemysłowej, o tyle te, które będą podane poniżej, ilustrują przedewszystkiem stosunki, mające miejsce w produkcji rolnej.

Zwyżka ceny produkowanego dobra, a więc np. pszenicy, poprzez zwiększenie zysków powoduje wzrost wartości przedsiębiorstw rolnych, produkujących pszenicę. Dotychczas przebieg wypadków jest taki sam jak poprzednio. W dalszym ciągu jednak, jeżeli przyjmiemy, że wszystkie grunty pewnego, jednakowego stopnia urodzajności, zostały już w całości wzięte pod uprawę, wówczas powstawanie nowych przedsiębiorstw, tego samego typu i pracujących w takich samych warunkach będzie niemożliwe. Na dotychczas uprawianych gruntach nastąpi intensyfikacja produkcji, celem powiększenia ilości produkowanych, ale tylko o tyle, aby osiągnąć maksymalny zysk globalny. Jedynem wyjściem z sytuacji będzie więc powiększenie uprawianych obszarów przez wzięcie pod uprawę gruntów o niższym stopniu urodzajności. Będzie to wprawdzie oznaczało powstawanie nowych przedsiębiorstw, lecz będą one pracowały już w warunkach gorszych, a mianowicie będą one miały wyższe koszty produkcji. W tym zatem wypadku, dzięki ograniczoności gruntu tej samej urodzajności, przypływ kapitału i pracy będzie niewystarczający dla zupełnego zlikwidowania zysków, osiąganych na gruntach urodzajniejszych. Najniższy średni koszt jednostkowy, osiągany na nowowziętych pod uprawę gorszych gruntach, będzie wyższy od dotychczasowego najniższego kosztu średniego, osiąganego na gruntach lepszych. Podaż pszenicy, zwiększona wskutek wzięcia pod uprawę gorszych gruntów, wpłynie oczywiście na obniżenie ceny, ale tylko do poziomu najniższego kosztu średniego, osiąganego na gruntach gorszych. Dla właścicieli gruntów lepszych pozostanie więc zawsze pewien zysk dodatkowy, ustabilizowany ostatecznie z chwilą, gdy cena pszenicy osiągnie wskazany przed chwilą poziom. Ten dodatkowy zysk będzie ich rentą gruntową, która skapitalizowana według bieżącej stopy procentowej, uwidoczni się w stałym wzroście wartości ich gruntów.

Dla dotychczas uprawianych gruntów lepszych struktura kosztów, poza wzrostem stałej sumy kosztów, pozostanie bez zmiany. Zatem zwyżka ceny, analogicznie jak w poprzednio rozpatrywanym wypadku produkcji przemysłowej, spowoduje dalsze jeszcze przesunięcie produkcji w sferę działania prawa zmniejszającego się przychodu. Ograniczoność jednego z czynników produkcji, np. ziemi, utrwala głębokość tego przesunięcia.

W obu wypadkach produkcja już poprzednio, t. zn. jeszcze przed zwyżką ceny, odbywała się pod znakiem zmniejszającego się przychodu. Zwyżka ceny spowodowała tylko jeszcze dalsze przesunięcie produkcji w tę sferę. W wypadku produkcji przemysłowej to dalsze przesunięcie było jednak tylko chwilowem, w produkcji rolnej natomiast ma ono charakter trwały. I to jest najistotniejszą różnicą między temi dwoma wypadkami.

W obu wypadkach produkcja stale będzie się odbywała po najniższych kosztach średnich, jeżeli zawsze zyski będziemy sprowadzać do zmian wartości danych przedsiębiorstw.

Jeżeli teraz, wraz z wszystkiemi innemi założeniami, utrzymamy w pełni założenie niezmiennej techniki produkcyjnej, to wówczas, jeżeli zachodzi wypadek ograniczoności przynajmniej jednego z czynników produkcji, rozszerzanie produkcji, odbywać się będzie mogło tylko po coraz to wzrastających najniższych kosztach średnich na jednostkę. Znaczy to, że po każdej zwyżce ceny danego dobra, najniższy koszt średni, po przejściu przez serję fluktuacyj, ustali się ostatecznie na poziomie wyższym od najniższego kosztu średniego sprzed zniżki ceny. Tam natomiast, gdzie nie zachodzi wypadek ograniczoności któregokolwiek z czynników produkcji, rozszerzanie produkcji będzie mogło odbywać się po stale tych samych, najniższych kosztach średnich. W tym wypadku najniższy koszt średni, po przejściu szeregu fluktuacyj, wywołanych zwyżką ceny, ustabilizuje się ostatecznie na poziomie, równym poziomowi sprzed zwyżki ceny. Z punktu widzenia średniego kosztu zatem możemy rozróżnić dobra, których produkcja może być powiększana po najniższych kosztach średnich równych, oraz dobra, których produkcja może być powiększana po najniższych kosztach średnich wzrastających. Pierwszy wypadek będzie odpowiadał przedewszystkiem produkcji przemysłowej, a drugi przedewszystkiem produkcji rolnej.

ROZDZIAŁ IX.

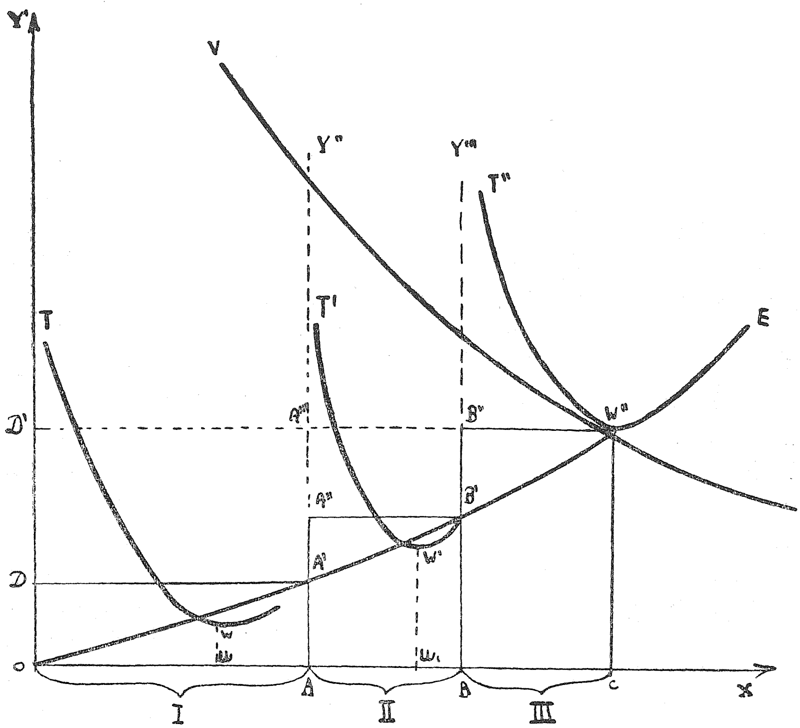
Krzywe kosztów a krzywa podaży.

Jak zaznaczałem w rozdziale I, podane w nim przezemnie przedstawienie związku, jaki zachodzi między krzywemi kosztów produkcji danego dobra u poszczególnych przedsiębiorców, a krzywą podaży tegoż dobra, było podane jako tymczasowe i wymagające pewnych zmian i uzupełnień, dla przeprowadzenia których należało przedtem zbadać wzajemne stosunki, zachodzące między kosztem średnim, kosztem krańcowym i ceną. Przeprowadzenie tych zmian i uzupełnień odłożone zostało do rozdziału niniejszego, ponieważ wciągu dotychczasowych uwag zawsze była mowa tylko o jednem przedsiębiorstwie i badane były stosunki zachodzące wyłącznie w ramach tego jednego przedsiębiorstwa, względnie, jeżeli była mowa o więcej niż o jednem, zakładano zawsze, że pracują one w identycznych warunkach i temsamem ich struktury kosztów są jednakowe. Pojęcie podaży nie było zresztą potrzebne do żadnego z rozpatrywanych problemów. Skoro jednak omówione zostały dokładnie indywidualne krzywe kosztów, słusznem jest wyjaśnić na zakończenie w jaki sposób tworzą one ogólną krzywą podaży, tembardziej, że wyjaśnienie podane w rozdziale I uznane zostało za niewystarczające.

Jeżeli przyjmiemy, że poszczególne przedsiębiorstwa pracują w różnych warunkach, w zależności od położenia geograficznego, w stosunku do rynków nabycia surowca i zbytu gotowych produktów, w zależności od warunków lokalnych rynków pracy i kapitału, w zależności wreszcie od stopnia wykwalifikowania robotników oraz zdolności administracyjnych i organizącyjnych ich kierowników, rezultatem tego będą różnice w strukturze i wysokości ich kosztów produkcji.

C e n a r ó w n o w a g i danego dobra będzie wówczas ustalona na poziomie najniższego średniego kosztu jednostkowego najdrożej produkującego, czyli t. zw. krańcowego przedsiębiorcy. Dlatego na poziomie najniższego kosztu średniego, że gdyby cena aktualna przewyższała ten poziom, krańcowy przedsiębiorca realizowałby dodatkowe zyski, co byłoby zachętą do powiększenia podaży drogą powstawania nowych przedsiębiorstw i obecna cena musiałaby w rezultacie ulec zmianie, nie byłaby więc ceną równowagi.

Ponieważ więc cena będzie równa najniższemu, średniemu kosztowi krańcowego przedsiębiorcy, będzie ona przewyższać najniższe średnie koszty pozostałych przedsiębiorców. Na podstawie rozdziału VI możemy powiedzieć, że wobec tego ci taniej produkujący przedsiębiorcy dążąc do osiągnięcia maksymalnego zysku przekroczą rozmiary produkcji wskazane najniższym kosztem śre-

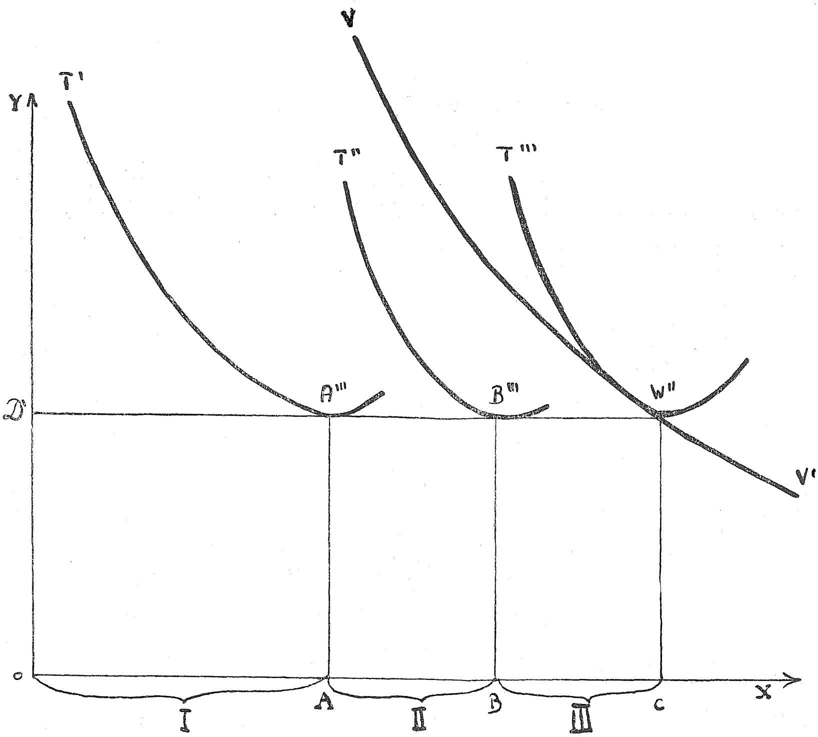


Rys. 35.

dnim. Przypuśćmy, że przedsiębiorców produkujących dane dobro jest trzech i oznaczmy ich kolejnemi cyframi rzymskiemi. Przedsiębiorca III będący na rys. 35 przedsiębiorcą krańcowym, produkuje ilość BC po koszcie średnim CW'', równym cenie i będącym jego kosztem średnim najniższym. Przedsiębiorca II, dążąc do osiągnięcia maksymalnej sumy zysków, będzie wówczas produkował ilość AB po koszcie średnim BB', wyższym od najniższego i będzie realizował dodatkowy zysk (rentę przedsiębiorcy), reprezentowany na rys. 35 przez prostokąt $A''B'B''A'''$.

Tak samo przedsiębiorca I przekroczy rozmiary produkcji, przy których uzyskiwał najniższy koszt średni i będzie produkował ilość *OA* po koszcie średnim *AA'*. Jego maksymalna suma zysków będzie wówczas równa prostokątowi *DA'A'''D'*.

Jeżeli teraz przeprowadzimy linję od początku układu współrzędnych po przez punkty odpowiadające średnim jednostkowym



Rys. 36.

kosztom produkcji ilości produkowanych przez poszczególnych przedsiębiorców, otrzymamy wówczas ogólną krzywą podaży. Rozbieżność między tą krzywą podaży *OW''* a faktycznie reprezentując podaż linją łamaną *ODA'A''B'B''W''* jest na rys. 35 znaczna. Jeżeli jednak przyjmiemy, że poszczególnych przedsiębiorców o różnej wysokości kosztach produkcji jest nie trzech, ale bardzo wielu, wówczas rozbieżność ta w znacznym stopniu zaniknie.

W rozdziale VI była mowa o tem, że rentę przedsiębiorcy skapitalizowaną według bieżącej stopy procentowej, możemy uznać za przyrost wartości przedsiębiorswa. Struktura kosztów ulega wówczas tej zmianie, że stała suma kosztów wzrasta o oprocentowanie tego przyrostu wartości przedsiębiorstwa, czyli właśnie o wysokość dotychczasowej renty. Obecny koszt średni na jednostkę będzie dla przedsiębiorcy I wynosił zatem już nie *AA'*, ale *AA'''*, a dla przedsiębiorcy II nie *BB'*, ale *BB''* i będzie równy cenie, tak samo jak najniższy średni koszt przedsiębiorcy III. Z rozdziału VI wiemy również, że te nowe koszty średnie przedsiębiorców I i II będą ich kosztami najniższemi.

Jak w tych warunkach wyglądać będzie krzywa podaży? Jest ona przedstawiona na rys. 36.

Widzimy na nim, że wszyscy przedsiębiorcy produkują teraz po najniższych kosztach średnich, oraz, że te najniższe koszty średnie są obecnie dla nich wszystkich równe. Krzywa podaży zatem zmienia się z krzywej *OW''* na rys. 35 w prostą *D'W''* na rys. 36. Konstrukcja krzywej podaży, ta którą przedstawiono na rys. 35 ma jednak pewną wyższość nad przedstawioną na rys. 36. Na rys. 36 wszyscy przedsiębiorcy są przedstawieni jako produkujący po najniższych kosztach średnich. Mimo to wiemy, że przedsiębiorcy I i II przetrzymają znaczny nawet spadek ceny poniżej poziomu ich obecnych najniższych kosztów średnich. Jak znaczną obniżkę ceny mogą oni przetrzymać? Jak znaczna obniżka zacznie już zagrażać ich egzystencji? Na te pytania rys. 36 nie daje nam odpowiedzi. Wyższość rys. 35 polega na tem właśnie, że odrazu możemy z niego ocenić zdolność reagowania każdego poszczególnego przedsiębiorcy na zniżkę ceny. Z rysunku tego widzimy, że najmniejszy nawet spadek ceny z poziomu *CW''* wyeliminuje odrazu przedsiębiorcę I, że natomiast przedsiębiorca II wytrzyma spadek ceny do poziomu *U'W'*, a przedsiębiorca I nawet do poziomu *UW*. Dla dalszych rozważań powróćmy więc do krzywej podaży takiej, jaka została przedstawiona na rys. 35.

Krzywa podaży *OW''* została na rys. 35 doprowadzona tylko do zetknięcia się z krzywą popytu *VV'*, a nie do przecięcia się z nią. Zostało to zrobione celowo. Krzywa podaży bowiem reprezentuje wyłącznie stan aktualny i nie daje nam ona żadnych danych, na podstawie których moglibyśmy przewidywać, gdzie ustali się nowa cena równowagi w razie przesunięcia krzywej popytu w prawo lub w lewo. Każde drgnienie ceny wywoła bowiem reakcję ze strony w s z y s t k i c h przedsiębiorców. Każde drgnienie ceny zmienia bowiem podstawę kalkulacyjną **każdego** z nich. Tą podstawą kalkulacyjną dla każdego z nich jest stosunek kosztu krańcowego do ceny. Ponieważ każdy z nich osiągać będzie maksymalny zysk wówczas, gdy produkcja jego osiągnie te rozmiary, przy których następuje zrównanie kosztu krańcowego z ceną, każda zmiana ceny zatem powoduje rozbieżność między dotychczasowym kosztem krańcowym i nową ceną. Każdy przedsiębiorca będzie więc dążył do dostosowania rozmiarów swej produkcji do tych zmienionych warunków. Wrazie zwyżki ceny będzie ją rozszerzał, dążąc do zrównania kosztu krańcowego z ceną. W konsekwencji tego będzie musiał produkować po wyższych kosztach średnich na jednostkę niż poprzednio. I odwrotnie wrazie zniżki ceny każdy przedsiębiorca będzie ograniczał rozmiary swej produkcji, gdyż tą drogą tylko osiągnie na nowo zrównanie kosztu krańcowego z ceną. Rezultatem tego będzie to, że produkcja jego będzie się obecnie odbywać po niższych jednostkowych kosztach średnich niż poprzednio. Każda zwyżka ceny wywoła zatem nietylko powstanie nowego przedsiębiorstwa, ale wpłynie na rozszerzenie produkcji wszystkich pozostałych dążących do powiększenia swoich zysków. Rozszerzając swoją produkcję będą oni produkowali po wyższych niż dotychczas kosztach średnich. Zwyżka ceny wywoła więc przesunięcie całej krzywej podaży do góry. Nowa cena równowagi będzie więc oznaczoną nie przez nowy punkt zetknięcia **dotychczasowej** krzywej podaży z **nową** krzywą popytu ale przez punkt zetknięcia **nowej**, zupełnie innej, krzywej podaży z **nową** krzywą popytu. I tak samo w wypadku obniżki ceny cała krzywa podaży ulegnie przesunięciu wdół i tak samo dotychczasowa krzywa podaży nie będzie miała nic wspólnego z nową ceną równowagi.

Krzywa podaży nie oznacza zatem reakcji przedsiębiorców na zmiany ceny. Jest ona tylko obrazem tego, jak zareagowali oni (każdy na podstawie swej własnej, indywidualnej krzywej kosztów) na obecną cenę. Nic nam ona nie mówi o tem, natomiast, jak zareagują oni na przyszłą cenę.

Krzywej podaży nie należy więc przypisywać więcej niż ona faktycznie reprezentuje, to jest odbicia chwilowego, uwarunkowanego daną ceną, stanu rzeczy i nic ponadto.

W warunkach równowagi gospodarczej krzywa podaży **nigdy** nie będzie mogła mieć kształtu krzywej wznoszącej się, tak jak na rys. 35. Pełna równowaga będzie bowiem mogła być osiągnięta dopiero wówczas, gdy nastąpi zrównanie najniższych kosztów średnich wszystkich przedsiębiorców. Zrównanie to będzie mogło zostać urzeczywistnione w dwojaki sposób.

Po pierwsze może ono mieć miejsce na poziomie najniższych kosztów średnich najdrożej produkującego, czyli krańcowego przedsiębiorcy. Będzie to miało miejsce wówczas, gdy mamy do czynienia z ograniczonością jednego z czynników produkcji, a więc np. w produkcji rolnej. Zrównanie najniższych kosztów średnich nastąpi w tym wypadku po przez wzrost wartości przedsiębiorstwa.

Po drugie zrównanie to może mieć miejsce na poziomie najniższych kosztów średnich najtaniej produkującgo przedsiębiorcy. Będzie to mogło mieć miejsce wówczas, gdy dzięki wolnej konkurencji warunki produkcyjne najtaniej produkującego przedsiębiorcy zostaną rozpowszechnione na wszystkie przedsiębiorstwa tej gałęzi przemysłu.

W obu tych wypadkach, to jest zarówno w wypadku zrównania na poziomie najdrożej produkującego przedsiębiorcy, jaki w wypadku zrównania na poziomie najtaniej produkującego krzywa podaży przybierze kształt taki, jak to przedstawiono na rys. 36 t. j. będzie poprostu linją prostą. I teraz również każde drgnienie ceny wywoływać będzie przesunięcia tej prostej. Będą to równoległe przesunięcia wgórę (przy zwyżce ceny), i wdół przy zniżce ceny). Tak samo więc i ta prosta nie będzie reprezentowała reakcyj przedsiębiorców na zmiany ceny, a tylko będzie obrazem ich ostatecznego dostosowania się do ostatniej ceny.

ROZDZIAŁ X.

Najprostszy wypadek monopolu.

W rozdziale niniejszym musimy porzucić niektóre założenia, na których były oparte wywody poprzednich rozdziałów. Przedewszystkiem porzucone zostaje założenie wolnej konkurencji. Następnie porzucone zostaje również założenie, że przedsiębiorca, którego działalność jest poddana badaniu, jest jednym z wielu w danej gałęzi przemysłu. Na miejsce tych założeń wprowadzone zostają następujące: po pierwsze, zupełne zmonopolizowanie danej gałęzi przemysłu i po drugie, w związku z tem, że w tej gałęzi przemysłu istnieje tylko jeden jedyny przedsiębiorca. Wobec tego upaść musi dalsze założenie, to jest założenie niezmienności ceny danego dobra, niezależnie od działalności produkcyjnej tego przedsiębiorcy. Obecnie przeciwnie, ponieważ *cała* podaż danego dobra jest pokrywana przez *jednego* tylko przedsiębiorcę, a więc jego działalność produkcyjna musi wywierać decydujacy wpływ na cenę produkowanego przez niego dobra. Poprzednio przyjmowane było, że *wysokość ceny* danego dobra *reguluje rozmiary produkcji* każdego poszczególnego przedsiębiorcy. Obecnie, zgodnie ze zmienionemi podstawowemi założeniami, należy ten stosunek odwrócić i przyjąć, że *rozmiary produkcji* tego jedynego przedsiębiorcy *regulują wysokość ceny* produkowanego przez niego dobra. (Przy tych rozważaniach pomijam możliwości zmiany ceny, wywołane zmianami wartościowania potrzeb, czyli przesunięciami krzywej popytu, a więc *jedyną* przyczyną zmian ceny będą tylko zmiany w rozmiarach produkcji. Zmiany ceny będą tylko przesunięciami na *tej samej* krzywej popytu, a nie przesunięciami całej krzywej popytu). Wszystkie pozostałe założenia pozostają bez zmiany, a więc między innemi i założenie, że ilość sprzedana równa się ilości wyprodukowanej.

Najprostszy wypadek monopolu będzie ten, w którym cała monopoliczna produkcja odbywać się będzie w zakresie jednego tylko przedsiębiorstwa. W tym wypadku bowiem krzywa kosztów tego monopolisty będzie jednocześnie krzywą podaży, produkowanego przez niego dobra. Rozważania niniejszego rozdziału odnoszą się wyłącznie do takiego, najprostszego wypadku.

W rozdziale VI funkcja ceny była funkcją stałą. Obecnie cena jednostkowa jest zmienną w zależności od rozmiarów produkcji, jest zatem jakąś funkcją ilości wyprodukowanej (równej ilości sprzedanej), funkcją malejącą w miarę wzrostu produkcji i rosnącą w miarę malenia produkcji. Jeżeli tak samo jak w rozdziale VI symbolem p oznaczymy cenę jednostkową, wówczas możemy napisać:

$$p = g(p).$$

Suma cen, uzyskiwana przez tego monopolistę, będzie iloczynem każdorazowej ceny jednostkowej przez odpowiadającą jej wielkość produkcji (sprzedaży). Oznaczmy ją, jak poprzednio, symbolem c. Wówczas:

$$c = g(q) \cdot q = G(q).$$

Załóżmy dalej, że jedynym celem tego monopolisty jest osiągnięcie maksymalnej sumy zysków. Jego funkcja sumy zysków będzie równa różnicy między sumą cen i sumą kosztów. Oznaczmy ją symbolem $Z_m(q)$.

$$Z_m(q) = G(q) - F(q).$$

Funkcja ta, jak wiemy, osiągnie swe maximum dla tej wartości q, dla której jej pierwsza pochodna będzie równa zeru. Znajdźmy jej pierwszą pochodną:

$$Z'_m(q) = G'(q) - F'(q)$$

i przyrównajmy ją do zera:

$$G'(q) - F'(q) = 0$$

a więc

$$G'(q) = F'(q).$$

A zatem w tym wypadku, gdy funkcja kosztów jest jednocześnie funkcją podaży, monopolista będzie osiągał maksymalny zysk wówczas, gdy pierwsza pochodna sumy cen będzie równa pierwszej pochodnej sumy kosztów, czyli będzie równa kosztowi krańcowemu.

Wypadek, omawiany w rozdziale VI, był, jak widzimy, pewnym specyficznym i szczególnym wypadkiem, gdy pierwsza pochodna funkcji sumy cen była równa cenie jednostkowej. W obecnie rozpatrywanym wypadku ta równość oczywiście już nie istnieje.

Funkcję ceny przyjmujemy obecnie jako funkcję malejącą. Funkcja sumy cen będzie zatem funkcją początkowo rosnącą i, po osiągnięciu swego maksimum, malejącą. Najprostszym będzie wypadek, jeśli przyjmiemy za funkcję ceny jednostkowej funkcję linjową o postaci:

$$g(q) = uq + w$$

przyczem, aby ta funkcja była funkcją malejącą, muszą zachodzić następujące warunki:

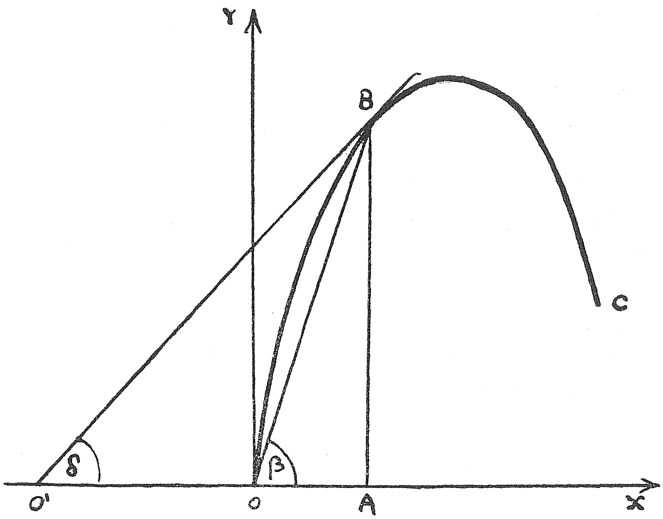
$$u < 0$$
$$w > 0.$$

Funkcja sumy cen będzie więc miała postać następującą:

$$G(q) = uq^2 + wq.$$

Będzie to zatem krzywa drugiego stopnia, której wykresem będzie parabola. Ponieważ współczynnik przy niewiadomej w drugiej potędze jest ujemny, będzie to parabola odwrócona, tak jak jest przedstawiona na wykresie na rys. 37.

Na wykresie tym zilustrowana jest również różnica między ceną jednostkową a pierwszą pochodną funkcji sumy cen. Dla ilo-



Rys. 37.

ści sprzedanej, równej np. OA, suma cen równa się AB, cena jednostkowa zatem równa się ilorazowi AB/OA. Jeżeli punkt B, leżący na krzywej sumy cen, połączymy linją prostą z początkiem układu współrzędnych, otrzymamy trójkąt prostokątny OBA. Stosunek boków AB do OA w tym trójkącie będzie to tangens kąta β, utworzonego przez tę prostą, łączącą początek układu z punktem B na krzywej z osią x-ów. Możemy więc napisać:

$$p = \frac{AB}{OA} = \operatorname{tg} \beta.$$

Natomiast pierwsza pochodna funkcji sumy cen równa się tangensowi kąta, utworzonego przez styczną do krzywej z osią x-ów. A więc np. dla punktu B, odpowiadającego ilości sprzedanej OA, pierwsza pochodna funkcji sumy cen równa się:

$$G'(q) = \frac{AB}{O'A} = \operatorname{tg} \delta.$$

Spróbujmy teraz zastosować te ogólne wywody do poszczególnych funkcyj sumy kosztów i rozpatrzmy je w wypadkach funkcji sumy kosztów, wzrastającej więcej niż proporcjonalnie, oraz funkcji sumy kosztów, wzrastającej nieproporcjonalnie.

W wypadku pierwszym funkcja zysku monopolicznego będzie się równać:

$$Z_m(q) = uq^2 + wq - bq^2 - cq - d$$

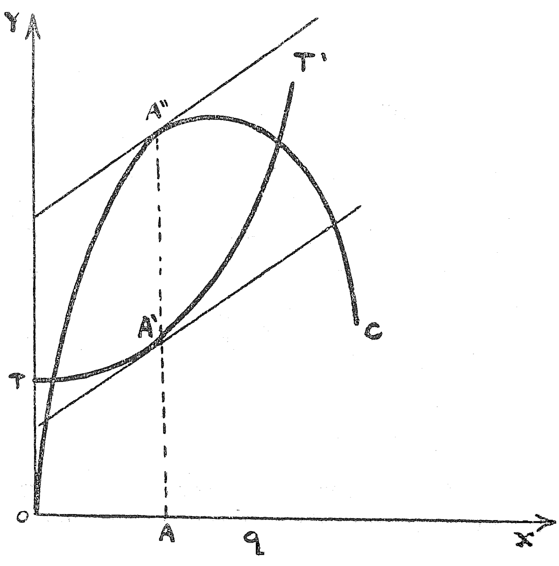
i osiągnie swe maksimum wówczas gdy

$$\begin{aligned} Z'_m(q) &= 2uq + w - 2bq - c = 0 \\ &= 2(u - b)q + w - c = 0. \end{aligned}$$

Znajdźmy wartość q z tego równania:

$$q = \frac{c - w}{2(u - b)}.$$

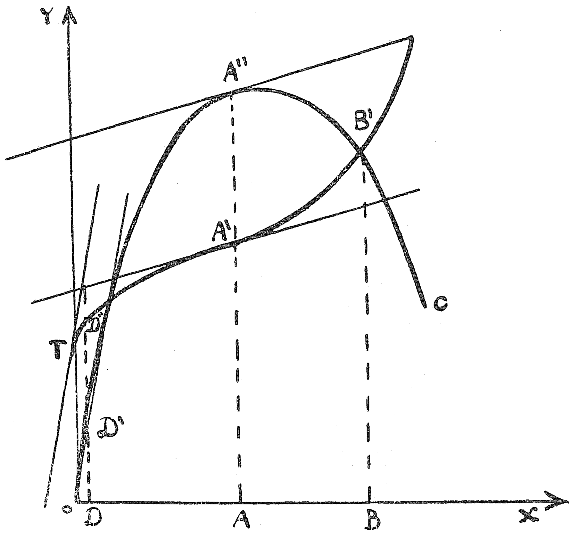
Dla tej wartości q funkcja $Z_m(q)$ osiągnie maksimum. To znaczy dla tak oznaczonych rozmiarów produkcji monopoliczny przedsiębiorca uzyska najwyższą t. zw. rentę monopolisty. Rys. 38 podaje graficzne rozwiązanie tego samego problemu.



Rys. 38.

Na rys. 38 krzywa $OA''C$ jest wykresem funkcji sumy cen, a krzywa $TA'T'$ jest wykresem funkcji sumy kosztów. Jak wiemy monopolista osiągnie największy zysk wówczas, gdy pierwsze pochodne obu tych funkcyj będą równe. Należy więc znaleźć na obu krzywych takie dwa punkty, odpowiadające jednej i tej samej wartości q, aby styczne poprowadzone do krzywych w tych punktach, tworzyły z osią x-ów kąty równe. Innemi słowami, obie styczne muszą być do siebie równoległe. Jak widzimy na rys. 38

istotnie możemy odnaleźć taką parę punktów, jeden na krzywej sumy kosztów a drugi na krzywej sumy cen, odpowiadające tej samej wartości $q = OA$ wartości q, że styczne, poprowadzone do tych krzywych, w tych dwóch punktach, będą do siebie równoległe. Dla rozmiarów produkcji, równych OA, suma kosztów poniesionych przez monopolistę,



Rys. 39.

wynosi AA', suma cen, uzyskana przez niego, równa się AA'', a jego renta monopolisty $A'A''$. Należy jeszcze zaznaczyć, że w tym wypadku monopolista będzie ponosił największe straty przy rozmiarach produkcji równych zeru. Będą one wówczas równe jego sumie kosztów stałych, oznaczonych na wykresie przez OT.

W wypadku sumy kosztów, wzrastającej nieproporcjonalnie, funkcja zysku monopolicznego będzie się równać:

$$Z_m(q) = uq^2 + wq - aq^3 - bq^2 - cq - d$$

i osiągnie swe maksimum wówczas gdy:

$$Z'_m(q) = 2uq + w - 3aq^2 - 2bq - c = 0$$

$$\text{czyli:} \quad 3aq^2 + 2(b-u)q + c - w = 0.$$

Znajdźmy wartość q z tego równania:

$$q_{1,2} = -\frac{(b-u)}{3a} \pm \frac{\sqrt{(b-u)^2 - 3a(c-w)}}{3a}.$$

Widzimy zatem, że w tym wypadku otrzymamy dwie wartości na q, dla których będzie spełniony postulat równości pierwszych pochodnych funkcji sumy kosztów i funkcji sumy cen. Przeprowadzając zupełnie analogiczne jak w rozdziale VI badanie drugiej pochodnej funkcji zysku monopolicznego, łatwo można się przekonać, że i w tym, podobnie jak w tamtym wypadku, mniejsza wartość q oznaczać będzie te rozmiary produkcji, przy których monopolista osiągnie największą sumę strat, większa zaś wartość q te rozmiary produkcji, przy których monopolista osiągnie największą sumę zysków. Ilustracją graficzną tego wypadku jest rys. 39.

Krzywa $TA'T'$ jest wykresem funkcji sumy kosztów, a krzywa $OA''C$ jest wykresem funkcji sumy cen. Wypadek ten tem się różni od poprzedniego, że obecnie możemy znaleźć dwie pary takich punktów (dla każdej z dwóch wartości q po jednej parze), że styczne, poprowadzone do krzywych w tych punktach, będą do siebie równoległe. Dla mniejszej wartości q, czyli dla wielkości produkcji równej OD, otrzymamy sumę cen, równą DD', a sumę kosztów równą DD''. Różnica między sumą kosztów a sumą cen, równa $D'D''$ oznacza maksymalną sumę strat monopolisty (większą niż przy wielkości produkcji równej zeru, kiedy to suma strat równa się stałej sumie kosztów i równa się OT). Dla większej wartości q, czyli dla wielkości produkcji równej OA, suma kosztów równa się AA' a suma cen AA''. Różnica między niemi wynosi $A'A''$ i oznacza maksymalną sumę zysków monopolisty.

---

* (Str. 241). Następnem skolei jest założenie, że każde przedsiębiorstwo wytwarza tylko jeden artykuł. Założenie to, konieczne dla uproszczenia dalszego rozumowania, dalekie jest naogół od rzeczywistości. W praktyce przeważnie mamy do czynienia z przedsiębiorstwami wytwarzającemi albo kilka równorzędnych produtków (np. huta żelazna, produkująca równorzędnie kilka gatunków żelaza), względnie z przedsiębiorstwami, wytwarzającemi obok produktu głównego jeden, lub więcej produktów ubocznych (np. produkcja srebra, jako produktu ubocznego przy produkcji ołowiu). Uwzględnienie tych wszystkich momentów skomplikowałoby znacznie analizę kosztów produkcji. Ponieważ zadaniem niniejszej pracy jest tylko służyć jako pierwsze przybliżenie i jako pierwszy krok w kierunku teorji kosztów produkcji, opiera się ona na możliwie najprostszych założeniach i komplikacje te nie są w niej brane pod uwagę.

** (Str. 243). Dla czytelnika mniej obznajomionego z stosowaniem matematyki do ekonomji, metoda, przyjęta w tej pracy, choć mniej doskonała, będzie może przejrzystsza. Może również (jeśli wolno mi wyrazić tę nadzieję) odegra ona dla niego rolę wstępu do szerszego i ogólniejszego stosowania matematyki do ekonomji.

Literatura.

Barone — Staehle, Grundzüge der theoretischen Nationalökonomie. Bonn 1927.
Byé M., Les lois des rendements non-proportionels. Paris 1928.
Clark J. M., The economics of overhead costs.
Edgeworth F. Y., Papers relating to political economy. London 1925.
Evans C. Griffith, Mathematical introduction to economics. New York 1930.
Górski L., La loi des rendements non-proportionels an Stade National. Paris 1924.
Harold R. F., Notes on Supply. Economic Journal 1930.
Heydel A., O pojęciu produktywności. Ekonomista 1934.
Hildebrandt R., Mathematisch-graphische Untersuchungen über die Rentabilitätsverhältnisse des Fabrikbetriebes. Berlin 1925.
Krzyżanowski A., Teorja Malthusa ze szczególnem uwzględnieniem jej stosunku do prawa zmniejszającego się przychodu z ziemi. Kraków 1908.
Leitner F., Die Selbstkostenrechnung industrieller Betriebe. Frankfurt 1930.
Marshall A., Zasady ekonomiki. Warszawa 1925.
Peiser H., Der Einfluss des Beschäftigungsgrades auf die industrielle Kostenentwicklung. Berlin 1929.
Pigou A. C., The laws of diminishing and increasing cost. Economic Journal 1927.
— An analysis of supply. Economic Journal 1928.
Robinson J., The economics of imperfect competition. London 1934.
Schmalenbach E., Selbstkostenrechnung und Preispolitik. Leipzig 1930.
Schneider E., Reine Theorie monopolistischen Wirtschaftsformen. Tübingen 1932.
— Theorie der Produktion. Wien 1934.
Schultz H., Statistical laws of demand and supply with special application to sugar, Chicago.
— Marginal productivity and the pricing process. Journal of Political Economy 1929.
Shove G. F., Varying costs and marginal net products. Economic Journal 1928.
Sraffa P., The laws of returns under competitive conditions. Economic Journal 1926.
Stackelberg H., Grundlagen einer reinen Kostentheorie. Wien 1932.
Strzeszewski Cz., Znaczenie prawa zmniejszającej się wydajności w produkcji rolnej. Warszawa 1934.
Viner J., Cost curves and supply curves. Zeitschrift für Nationalökonomie, 1931.
Zawadzki W., Zastosowanie matematyki do ekonomji. Wilno 1914.
— Teorja produkcji. Warszawa 1933.
Zeuthen F., Problems of monopoly and economic warfare. London 1930.

Spis treści.